

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 530.182

На правах рукописи

**САГИДУЛЛАЕВА ЖАННА МУРАТБЕКОВНА**

**Локальные и нелокальные интегрируемые спиновые системы с  
самосогласованными потенциалами**

6D060400 – Физика

Диссертация на соискание степени  
доктора философии (PhD)

Научные консультанты  
доктор физико-математических наук,  
профессор  
Р. Мырзакулов;  
доктор PhD,  
профессор  
Д. Синглетон

Республика Казахстан  
Астана, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ</b> .....	4
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗУЧАЕМОЙ НАУЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ</b> .....	11
<b>2 ЛОКАЛЬНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ</b> .....	18
2.1 Решение обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с потенциалом методом преобразования Дарбу .....	18
2.1.1 Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица.....	19
2.1.2 Преобразование Дарбу .....	22
2.1.3 Солитонное решение.....	26
2.2 Метод Хироты для обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с потенциалом .....	36
2.2.1 Билинеаризация.....	36
2.2.2 Солитонное решение.....	38
2.3 Уравнение иерархии ферромагнетика Гейзенберга .....	41
2.3.1 Билинеаризация иерархии уравнения УФГ.....	43
2.3.2 Солитонное решение.....	44
2.4 Уравнение Богоявленского—Конопельченко с переменными коэффициентами.....	48
<b>3 НЕЛОКАЛЬНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ</b> .....	51
3.1 Уравнение Яджимы-Ойкавы .....	54
3.2 Представление Лакса .....	55
3.3 Солитонное решение.....	56
3.4 Билинейная форма уравнения.....	59
3.5 Солитонное решение спиновой системы.....	59
3.6 Нелокальные уравнения для спиновых систем.....	61
<b>4 НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ МАГНЕТИКОВ И ИХ ГЕОМЕТРИЯ</b> .....	64
4.1 Интегрируемые поверхности, индуцированные обобщенным уравнением Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом.....	64
4.1.1 Фундаментальные формы для спиновых моделей .....	64
4.1.2 Интегрируемые поверхности, индуцированные ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом .....	67
4.1.3 Площадь поверхности индуцированной ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом.....	69
4.2 Интегрируемые кривые индуцируемые уравнением Яджимы-Ойкавы.....	70
4.3 Бездисперсионные пределы уравнений .....	71
4.3.1 Бездисперсионный предел ОУЛЛ с потенциалом .....	72
4.3.2 Представление Лакса для бездисперсионного предела ОУЛЛ с потенциалом.....	73
4.4 Двухслойные спиновые модели.....	75
4.4.1 (1+1)-мерное двухкомпонентное уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха .....	75

4.4.2 Калибровочная эквивалентность 2-х компонентного уравнения ШМБ, Г -спин системы и двухслойного ОУЛЛ.....	76
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	81
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	84

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ОУЛЛ	– обобщенное уравнение Ландау-Лифшица
НУШ	– нелинейное уравнение Шредингера
УФГ	– уравнение ферромагнетика Гейзенберга
MRAM	– магниторезистивная оперативная память (MRAM – англ. magnetoresistive random-access memory)
СВП	– самосогласованный векторный потенциал
УИФГ	– уравнение иерархии ферромагнетика Гейзенберга
МОЗР	– метод обратной задачи рассеяния
ПД	– преобразование Дарбу
УКП	– уравнение Кадомцева-Петвиашвили
НЭУ	– нелинейное эволюционное уравнение
УБК	– уравнение Богоявленского-Конопельченко

## ВВЕДЕНИЕ

Локальные и нелокальные интегрируемые спиновые системы с самосогласованными потенциалами являются объектом исследования в физике магнетизма и спинтроники. Локальные системы обычно описываются интегрируемыми нелинейными уравнениями, в которых потенциалы зависят только от локальных переменных. Такие системы могут быть решены аналитически или численно с использованием методов теории солитонов.

Нелокальные спиновые системы, с другой стороны, включают в себя дополнительные потенциальные поля, которые зависят от нескольких переменных в пространстве или времени. Эти системы могут описываться интегрируемыми нелинейными уравнениями с нелокальными потенциалами. Решение таких систем может быть более сложным из-за неоднородности взаимодействий между спинами и влияниями далекодействующих взаимодействий.

Изучение локальных и нелокальных интегрируемых спиновых систем с самосогласованными потенциалами позволяет более глубоко понять их динамику, структуру солитонов и возможности существования интегрируемых моделей в таких системах. Это может привести к разработке новых математических методов и моделей для описания физических явлений в спиновых системах, а также к созданию новых технологий на основе этих систем.

### **Актуальность темы диссертации**

В настоящее время теория солитонов стремительно развивается. Солитон представляет собой структурно устойчивую уединённую волну, распространяющуюся в нелинейной среде. Благодаря своим особым свойствам солитоны ведут себя подобно частицам (частицеподобная волна): при взаимодействии друг с другом или с некоторыми другими возмущениями они не разрушаются, а продолжают движение, сохраняя свою структуру неизменной. Это свойство может использоваться для передачи данных на большие расстояния без помех. Что открывает огромные возможности для использования солитонов. Солитоны и солитоноподобные волны могут наблюдаться в различных областях физики. Математическое описание солитонов также получило развитие. За последние десятилетия теория нелинейных эволюционных уравнений продвинулась настолько, что появились нелокальные модели: пространственные, временные и пространственно-временные.

Исследование спиновых систем относится к фундаментальным задачам современной физики. Однако, вопросы, связанные с описанием нелокальных интегрируемых спиновых систем, остаются открытыми и данное направление стало одним из активных областей исследований в области физики и математики за последние годы. В рамках теории солитонов определение взаимодействий спинов и спиновых цепочек достаточно лаконично включает теорию интегрируемых систем. К важному подклассу нелинейных эволюционных уравнений - интегрируемым спиновым системам, которые описывают динамику

распространения волновых пакетов в магнетиках, относится обобщенное уравнение Ландау-Лифшица (ОУЛЛ). В данном исследовании изучается ОУЛЛ с самосогласованными потенциалами и его эквиваленты. Фундаментальное понимание спиновых систем, а также систем с самосогласованными потенциалами и их исследование поможет расширить наше понимание магнитных материалов и спиновой динамики. Впоследствии это даст возможность исследовать различные аспекты, такие как структура спиновых волн, магнитные домены и взаимодействия между спинами.

Интегрируемые спиновые системы с самосогласованными потенциалами представляют большой интерес с точки зрения теоретической физики. Они позволяют получать точные аналитические решения, а также исследовать свойства солитонов - нелинейных волновых структур, которые могут быть стабильными и передвигаться без искажений. Изучение солитонов в спиновых системах имеет важное значение для разработки новых методов передачи и обработки информации. Исследования в данной области способствуют развитию спинтроники и магнитоэлектроники. Спинтроника является междисциплинарной областью исследования, в нее вовлечены ученые и исследователи из различных областей, таких как физика, материаловедение, электроника и технологии. Эти области технологии основаны на использовании свойств и управлении спиновым моментом электронов. Понимание и контроль спиновой динамики в различных системах открывает новые возможности для создания более эффективных и мощных устройств, таких как устройства магнитной памяти, спинтронные транзисторы и логические элементы, магнитные датчики и т.д.

Результаты исследований в области спиновых систем с самосогласованными потенциалами могут иметь прямое применение в различных технологических областях. Например, разработка новых материалов и структур на основе этих систем может привести к созданию более эффективных и мощных устройств в области спинтроники, магнитоэлектроники и информационных технологий. Кроме того, способствует развитию фундаментальных аспектов математической физики и имеет потенциал для применения в других областях науки и инженерии.

**Цель диссертационной работы** – Теоретическое исследование локальных и нелокальных интегрируемых спиновых систем с потенциалом, поиск солитонных решений.

**Задачи исследования:**

1. Описать появление солитонов в ферромагнитных материалах на примере одномерных магнетиков.
2. Найти солитонные решения обобщенного уравнения Гейзенберга.
3. Получить новую спиновую систему, калибровочно-эквивалентную уравнению семейства нелинейных уравнений Шредингера, ее представление Лакса для локального и нелокального случаев.

**Объект исследования**

Спиновые волны и динамика спинов в ферромагнитных материалах.

### **Предмет исследования**

Солитонные и солитоноподобные решения, корректно описывающие динамику взаимодействия спинов в ферромагнитных материалах, в том числе с условием наличия потенциала.

### **Методологическая база исследования**

В диссертационной работе использованы методы теории солитонов, такие как прямой метод Хироты, метод преобразования Дарбу и метод  $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ -разложения для нахождения решений уравнений с постоянными и переменными коэффициентами. Вышеназванные методы исключительно оптимальны для нахождения точных и аналитических решений интегрируемых спиновых систем. Они также позволяют разработать систематическое построение разных видов решений: солитонных, решений типа разрушительных волн, бризеров, доменных стенок и т.д.

### **Научная новизна и практическая ценность диссертации**

Научная новизна диссертационной работы заключается в том, что получена новая спиновая модель, описывающая движение вектора намагниченности в ферромагнетиках. Исследование характера поведения вектора намагниченности и спиновых волн позволяет поставить гипотезу о возможности появления солитонов и солитоноподобных формирований в данной среде. В частности, получены следующие результаты:

- Новая спиновая система, калибровочно эквивалентная уравнению семейства нелинейных уравнений типа Шредингера, а именно уравнению Яджимы-Ойкавы.
- Представление Лакса, доказывающее интегрируемость полученной спиновой модели в рамках теории солитонов.
- Точные солитонные и солитоноподобные типы решений нелокальной обобщенной спиновой модели и модели с потенциалом.
- Обобщение методов нахождения солитонных и солитоноподобных решений нелокальных спиновых моделей. Нелокальные версии рассматриваемых моделей, приведенных в работе, могут обеспечить дальнейшие расширения с комплексными компонентами. В работе показано как естественным образом нелокальность может быть включена в пару вспомогательных уравнений, возникающих в этой ситуации. Также как нелокальность реализуется в стандартных типах процедур решения нелинейных уравнений.

Данные результаты способствуют развитию методов теории солитонов, исследований интегрируемых спиновых систем, а также расширению подходов, связанных с наличием  $P$ - и  $PT$ -симметрий рассматриваемых моделей.

### **Основные положения диссертации, выносимые на защиту:**

1. Коэффициент  $a$  в обобщенном уравнении Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом влияет на поведение компонент спинового вектора  $S_3$  и потенциала  $W_3$ , с увеличением данного коэффициента наблюдается увеличение амплитуды потенциала.

2. Полученная новая спиновая система, калибровочно-эквивалентная обобщенному уравнению типа нелинейного уравнения Шредингера, описывает движение вектора намагниченности в ферромагнетиках; в нелокальном случае спиновая матрица  $S$  не является эрмитовой и обладает  $PT$ -симметрией вида  $S(t, x) = \sigma_3 S^\dagger(t, -x) \sigma_3$ , а для локального случая  $S$  – эрмитова.

3. Расширенный обобщенный метод  $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ -разложения позволяет находить решения нелинейных эволюционных уравнений как с постоянными, так и с переменными коэффициентами, тогда как базовый метод  $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ -разложения можно использовать только с постоянными коэффициентами.

#### **Личный вклад автора**

Основные результаты диссертационного исследования получены лично автором. Численные расчеты и графики найденных решений выполнены автором самостоятельно. Публикации по теме диссертации подготовлены автором лично. Постановка задач, выбор методов исследования и обсуждение результатов проводились совместно с научными консультантами.

#### **Апробация результатов работы**

Основные результаты исследований, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях:

1. The International Conference in Advancement in Mathematical Sciences (AMS-2015) Анталия, Турция 2015.

2. The International Scientific Conference “Modern problems of applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2016” Бухара, Узбекистан 2016.

3. The first Annual Meeting of Kazakh Physical Society, Nazarbayev University, Астана 2018.

4. Семинары научной межкафедральной исследовательской группы «Функциональный анализ и математическая физика» (кафедра физики Калифорнийского государственного университета Фресно).

5. International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences (NTADES 2019) Св. Константин и Елена, Болгария 2019.

6. The XXVIth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-26) Прага, Чехия 2019.

7. «Уфимская Осенняя Математическая Школа – 2021», Башкирский государственный университет, Уфа, Башкортостан, Россия.

8. The XII. International Symposium on Quantum Theory and Symmetries (QTS12) Прага, Чехия, 2023.

Кроме того, полученные результаты обсуждались на кафедре общей и теоретической физики Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева и на семинарах Евразийского международного центра теоретической физики.

#### **Опубликованность результатов**

По результатам диссертационной работы опубликовано 19 статей, в том

числе 2 статьи в журналах с ненулевым импакт-фактором, входящих в международные информационные ресурсы Web of Science (Clarivate Analytics, США) и Scopus (Elsevier, Нидерланды); 3 статьи в сборниках зарубежных международных конференций, индексируемых в базах Web of Science и Scopus, 3 статьи в периодических изданиях, рекомендованных КОКШВО МНВО РК; 11 статей и тезисов в материалах международных конференций РК. Основные публикации:

1. Sagidullayeva Zh., Nugmanova G., Myrzakulov R., Serikbayev N., Integrable Kuralay Equations: Geometry, Solutions and Generalizations// Symmetry. – 2022. – Vol. 14, No 7. – P. 1374. Impact Factor 2022 – 2.7. Q2, Процентиль 78.

2. Mohanty S. K., Pradhan B., Sagidullayeva Zh., Myrzakulov R., Dev A. N., Exact solutions for the Bogoyavlensky-Konopelchenko equation with variable coefficients with an efficient technique // Alexandria Engineering Journal. –2023.– Vol. 72. – P. 287-293. Impact Factor 2022 – 6.8. Q1, Процентиль 93.

3. Nugmanova G., Myrzakulov R., Sagidullayeva Zh. Hirota's method for a spin model with self-consistent potential // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 804, 2017. - 012035, Процентиль 22.

4. Sagidullayeva Z., Nugmanova G., Myrzakulov, R. Integrable surfaces induced by generalized Landau-Lifshitz equation with self-consistent potential // Journal of Physics: Conference Series, 2019, Процентиль 22.

5. Sagidullayeva, Z., Nugmanova, G., Myrzakulov, R. Dispersionless limit of the Heisenberg ferromagnet equation with self-consistent potential // AIP Conference Proceedings, 2019, Процентиль 15.

6. Нугманова Г.Н., Сагидуллаева Ж.М. Обобщенная спиновая модель с векторным потенциалом и ее решение // Вестник Карагандинского университета, Серия Математика.-Караганда, 2017.-№2(86).-С. 91-96.

7. Сагидуллаева Ж.М. О калибровочной эквивалентности двухслойного уравнения М-ХСІХ и двухкомпонентного уравнения Шредингера-Максвелла-Блоха // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия физика, астрономия. – Астана, 2018 –№3(124).– С.41-46.

8. Albatyrova M.B., Sagidullayeva Zh.M. Rogue wave and soliton solution for the nonlinear integrable spin model // Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2023. – Vol. 2., No 346. – P. 19-26.

#### **Связь темы диссертации с планами научных работ**

Работа выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ в рамках проектов по грантовому финансированию по следующим проектам:

1. 0893/ГФ4 «Исследование обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованными источниками и его интегрируемых редукций», 2015-2017 гг (рук. Нугманова Г.Н.).

2. AP08857372 «Исследование связи геометрии поверхностей/многообразий и интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений», 2020-2022 гг. (рук. Нугманова Г.Н.).

3. AP14972423 «Исследование некоторых интегрируемых локальных и нелокальных обобщенных спиновых систем» (грантовое финансирование исследований молодых ученых по проекту «Жас Ғалым» на 2022-2024 гг., рук. Сагидуллаева Ж.М.).

**Объем и структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованных источников. Работа изложена на 90 страницах машинописного текста, содержит 22 рисунка, приведено 279 формул, список использованных источников содержит 104 наименования.

# 1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗУЧАЕМОЙ НАУЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ

С момента первого наблюдения солитона Джона Скотта Рассела в 1834 году эти исключительно устойчивые одиночные волны очаровали ученых своими впечатляющими экспериментальными свойствами и их явной элегантностью [1-3]. Но, возможно, замечательные математические свойства интегрируемых систем с солитонными решениями привлекли наибольшее внимание. Математические аспекты, выдвинутые в большинстве книг посвященных солитонам, приводят к красивым теориям, таким как обратное преобразование рассеяния [4]. Однако, помимо математики, физика солитонов также очень увлекательна и лежит в основе современных исследований. Например, многие эксперименты по конденсации Бозе-Эйнштейна (Нобелевская премия по физике 2001 г. [5]) анализируется в терминах нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), которое является одним из основных уравнений теории солитонов. Нобелевская премия по химии 2000 года (лауреаты А.Хигер, А.Мак-Диармид, Х.Сиракава) также тесно связана с солитонами, поскольку носители заряда в проводящих полимерах являются солитонами [6]. В настоящей работе исследуется возможность возникновения солитонов в ферромагнетиках.

Системы магнетиков широко изучаются по двум главным причинам:

1. Они являются отличными моделями для описания фазовых переходов, т.к. они позволяют теоретические и экспериментальные исследования фундаментальных проблем статистической физики.

2. Они обладают важными приложениями, в частности, для высокой плотности записи данных, что требует высокопроизводительные материалы. На самом деле, материалы трехмерные, хотя магнитные пленки предназначенные для записи данных двухмерные, но в некоторых твердых магнитах, магнитные взаимодействия почти идеально одномерные. Магнитные материалы являются одними из наилучших примеров систем, в которых теория солитонов может быть изучена экспериментально в масштабах атома.

Ферромагнетизм и антиферромагнетизм.

В твердых телах магнитный момент атомов имеет два источника:

а) спин электронов и ядра, который является квантовым внутренним моментом количества частиц, связанный с магнитным импульсом;

б) орбитальный угловой момент электронов, возникающий за счет движения электронов вокруг ядра, который также квантуется и связан с магнитным моментом.

Магнетизм – одно из древнейших явлений в истории естествознания, которое изучается на протяжении почти трех тысяч лет. Магниты привлекли внимание ученых древности и первым технологическим продуктом, полученным в результате этого был магнитный компас. Хотя ранняя форма компаса была изобретена в Китае в XI веке, только в 1600-х годах было предложено что-либо, напоминающее современное описание работы компаса [2,

р. 240; 3, р. 211]. Прогресс в последние два столетия шел быстрее, и были получены важные результаты, связывающие магнетизм с другими физическими явлениями. Понимание связи между магнетизмом и электричеством началось в 1819 году со случайного открытия Эрстеда. Тщательный вывод Максвеллом системы из четырех уравнений в 1860-х годах привел к электромагнитному магнетизму. Эта связь получила дальнейшее развитие в теории относительности Эйнштейна. Тем не менее, магнетизм в системах конденсированного состояния, сопровождаемый квантово-механическим пониманием, в том числе ферромагнетиками и низкоразмерными системами. Магнитные свойства, проявляемые в макроскопическом масштабе, принципиально отличаются от свойств так называемых обычных материалов. Магнетизм можно понимать как коррелированное явление, включающее взаимное взаимодействие огромного числа частиц на макроскопических масштабах. Эти процессы идут параллельно с технологическим стремлением найти новые материалы для использования в качестве постоянных магнитов, электрических и магнитных датчиков или приложений для хранения информации.

Магнетизм изучался и развивался с учетом двух основных аспектов. Один из них заключается в усилении магнитных свойств путем поиска новых материалов или корректировки состава различных элементов в соединениях, которые придают магнитные свойства. Второй аспект заключается в том, чтобы понять их электрические отклики и отразить перенос электронов через магнитные материалы, обладающие дальним порядком, не существующим в обычных материалах. Таким образом, понимание магнитных свойств резко улучшилось. Магнитные материалы лежат в основе многочисленных приборов и устройств, используемых в повседневной жизни. От макроскопического магнетизма до магнитных явлений атомного масштаба (взаимодействие кристаллического поля, релятивистское спин-орбитальное взаимодействие) их важность уже давно привела к интенсивным исследованиям [4, р. 685]. В настоящее время становится ясно, что будущее развитие магнетизма упирается в недавнее развитие наномира [5, р. 415]. Ожидается, что магнитные материалы, содержащие аномальные магниты, повысят эффективность широко распространенных технологий, таких как запись данных, и реализуют новые функции приложений в науке. Ключом к этому ожидаемому улучшению технических возможностей является уникальное сочетание малого размера, экзотических свойств и технологичности наноманитов. Магнитооптические свойства наноманитов привлекли также столь значительное внимание в последние годы в связи с их потенциалом использования в качестве магнитооптических накопительных материалов, магнитооптических переключателей, модуляторов или датчиков на основе эффекта Фарадея [6, р. 19]. Помимо этих приложений кажется очевидным, что в настоящее время применение наноманитов, которые привлекают больше внимания, находится в области записи данных. Магнитная запись, изобретенная более 100 лет назад, сыграла ключевую роль в развитии технологий энергонезависимого хранения информации, включая аудио, видео и данные [7]. Кажется очевидным, что одним

из ключей к улучшению накопления магнитного поля является увеличение реальной плотности, достигаемое за счет уменьшения размера частиц [8].

К упорядоченным магнитным системам обычно относят спиновые системы. В частности, спиновый момент импульса или спин – это внутреннее свойство, связанное с квантовыми частицами, которое не имеет классического аналога. Макроскопически все вещества в той или иной степени магнитны, и каждый материал, помещенный в магнитное поле, приобретает магнитный момент или намагниченность. По аналогии с соотношением между дипольным моментом петли с током в магнитном поле и орбитальным угловым моментом движущегося электрона можно связать магнитный момент/намагниченность со средним значением оператора спинового углового момента, который можно назвать просто спин. Эти материалы обычно состоят из доменов, которые демонстрируют дальний порядок, который заставляет спины атомарных ионов выстраиваться параллельно друг другу в домене. Лежащее в основе взаимодействие происходит из спин-спинового обменного взаимодействия, которое вызвано перекрытием электронных волновых функций [9-11].

Спиновый ток относится к потоку частиц с определенным свойством, называемым «спином». В квантовой механике спин является внутренним свойством элементарных частиц, таких как электроны. Обычно его представляют как внутренний угловой момент частицы, хотя важно отметить, что спин не связан со физическим вращением частицы.

В классическом понимании электрического тока, как потока электронов в проводнике, ток связан с движением заряда. Однако в случае спинового тока именно спин частиц несет информацию и может быть манипулирован для различных применений.

Спиновые токи могут быть сгенерированы и манипулированы в материалах с определенными свойствами, такими как ферромагнитные или спин-поляризованные материалы. Эти материалы имеют врожденный магнитный порядок, который позволяет выравнивать и манипулировать спинами электронов.

Один из ключевых аспектов спинового тока заключается в его потенциале для переноса и манипулирования информацией в спин-основанных электронных устройствах или спинтронных устройствах. В отличие от традиционных электронных устройств, которые зависят от заряда электронов, спинтронные устройства используют спин электронов для хранения, обработки и передачи информации. Это поле исследований имеет потенциал для создания более эффективных и быстрых технологий хранения и обработки данных.

Спиновые токи также исследуются из-за своего потенциала применения в таких областях, как спин-основанные логические устройства, осцилляторы с использованием крутящего момента спина и магнитные запоминающие устройства (MRAM), и другие [12].

В целом, спиновый ток относится к потоку частиц с определенной ориентацией спина, и его понимание и контроль открыли новые возможности для развития спин-основанной электроники и спинтроники. спинтроника

является активной областью исследований, и постоянно появляются новые достижения и прорывы.

В последние годы было достигнуто несколько значимых прогрессов в спинтронике:

*Управление спином с помощью электрического поля:* Было продемонстрировано управление спином электронов с помощью электрического поля без применения магнитных материалов. Это открытие может привести к более эффективным и энергоэффективным спинтронным устройствам.

*Спинтроника на основе двумерных материалов:* Исследователи изучают возможности спинтроники на основе двумерных материалов, таких как графен и топологические изоляторы. Эти материалы обладают уникальными электронными и спиновыми свойствами, которые могут быть использованы для создания новых устройств и приложений.

*Развитие спиновых транзисторов:* Был значительный прогресс в разработке спиновых транзисторов, которые позволяют манипулировать потоком спина с помощью внешних электрических полей. Это может привести к созданию более эффективных и быстрых спин-основанных устройств.

*Применение спинтроники в магнитной памяти:* магниторезистивная оперативная память (MRAM) является одним из наиболее важных приложений спинтроники. В последние годы были представлены новые дизайны и материалы для создания более плотных, быстрых и энергоэффективных MRAM-устройств.

*Спиновые токи в топологических изоляторах:* Исследователи продолжают изучать спиновые токи и их свойства в топологических изоляторах. Такие материалы могут быть полезными для создания устройств, в которых информация переносится спиновыми токами.

Рассмотрим физическую составляющую спиновых взаимодействий.

Полный магнитный момент  $M$  выражается через полный угловой момент  $J$  как,  $M = \gamma J$ , где  $\gamma$  – гиромангнитное отношение. Для рассматриваемых материалов, магнитный момент обусловлен непарными электронами и задается как  $M = \gamma S$ , где  $S$  – полный спин атома [1, с. 96].

Несмотря на то, что понимание того, как именно магнитные моменты взаимодействуют в твердых телах все еще является одной из сложнейших задач физики твердого тела, на данный момент есть установленные основные результаты. Основным членом во взаимодействии является не дипольный член связи между магнитными моментами как считалось ранее. Большой вклад вносит электростатическое взаимодействие электронов. Квантовые частицы действительно неразличимы и это накладывает условие симметрии на квантовые состояния системы, что является функцией орбитальной и спиновой переменной частицы. В результате энергия системы двух взаимодействующих электронов со спинами  $S_1$  и  $S_2$  зависит от их спинов таким образом, что можно записать условие симметрии как

$$U = -JS_1 \cdot S_2, \quad (1)$$

это и есть обменный гамильтониан Гейзенберга [2, с. 20]. Постоянная  $J$  – обменный интеграл [3, р. 257]. Его знак определяет тип взаимодействия:  $J_0$  описывает ферромагнитное упорядочение, а  $J < 0$  – антиферромагнитное. Выражение (1) называют гамильтонианом Гейзенберга. Большинство магнетиков достаточно хорошо им описываются, однако в ряде случаев необходимо учитывать отличие реального гамильтониана от гейзенберговского. В простейшем случае он содержит только первую степень скалярного произведения, что соответствует спину  $S = \frac{1}{2}$  (одноэлектронный ион), иначе необходимо учитывать слагаемые со степенями вплоть до  $2S$  (многоэлектронные ионы) [1, с. 97]. Случай, когда присутствует квадратичная поправка  $J_{ij} \cdot (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2)^2, J'_{ij} \cdot (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2)^2$ , называют биквадратным обменом. Она достигает минимума, когда спины перпендикулярны друг другу. Подобная связь между спинами может наблюдаться в многослойных системах [6].

Так как гамильтониан макроскопического тела, учитывающий кинетические энергии и энергии кулоновского взаимодействия ионов и электронов, имеет слишком сложную структуру для аналитического анализа, обычно предполагают что его можно заменить суммой гамильтонианов.

Квантово-механическую динамику магнитных спиновых операторов в ферромагнетиках описывает уравнение ферромагнетика Гейзенберга (УФГ). Общая форма уравнения Гейзенберга для ферромагнетиков может быть записана следующим образом:

$$i\hbar \frac{dS}{dt} = [S, H], \quad (2)$$

где  $i$  – мнимая единица;

$\hbar$  – приведенная постоянная Планка;

$dS_i/dt$  – производная по времени от оператора спина  $S_i$ ;

$[S_i, H]$  – коммутатор оператора спина  $S_i$  и гамильтониана  $H$  системы.

Гамильтониан  $H$  описывает энергию и взаимодействия в системе ферромагнетика и может содержать различные термины, такие как обменное взаимодействие, затухание, внешние магнитные поля и другие взаимодействия. Форма гамильтониана зависит от конкретной системы и используемой модели.

Уравнение ферромагнетика Гейзенберга позволяет исследовать динамику и свойства магнитных спинов в ферромагнетиках, такие как прецессия спина, когерентные и некогерентные переходы между различными спиновыми состояниями, магнитные волны и другие явления. УФГ является основным инструментом в теории магнетизма и используется для объяснения экспериментальных наблюдений и численных моделирований магнитных материалов.

Ферромагнетики – это класс материалов, которые проявляют ферромагнитные свойства. Они обладают спонтанной намагниченностью, то есть имеют внутренний магнитный момент, который ориентирован в

определенном направлении без внешнего магнитного поля. Под действием внешнего поля ферромагнетики могут образовывать магнитные домены, в которых магнитные моменты выстраиваются в определенных направлениях.

Примеры ферромагнетиков включают железо, никель, кобальт, гадолиний и многие другие материалы. Ферромагнетики имеют широкий спектр применений, включая использование в магнитных записывающих устройствах (например, жестких дисках), электромагнитных катушках, магнитных сенсорах и многих других устройствах.

Ферромагнетизм в ферромагнетиках обусловлен взаимодействием спинов электронов внутри материала. В основе ферромагнетического взаимодействия лежит обменное взаимодействие между спинами электронов, которое способствует упорядочению спиновых моментов в материале. Также взаимодействие с кристаллической решеткой материала может играть важную роль в ферромагнетических свойствах.

Ферромагнетики обладают рядом характерных свойств, таких как спонтанная намагниченность, ферромагнитная насыщенность, кривая гистерезиса, кривая намагничивания и другие. Их поведение может быть описано с использованием различных теорий и моделей, таких как модель Изинга, модель Гейзенберга, модель Кюри-Вейсса и другие.

Изучение ферромагнетиков имеет важное значение как с практической, так и с фундаментальной точек зрения. В настоящее время исследователи продолжают изучать их свойства, включая динамику спиновых систем, магнитооптические явления, ферромагнитные резонансы и другие аспекты.

Спонтанная намагниченность, присущая ферромагнетикам, находит широкое применение в различных технологических и научных областях. Ниже перечислены некоторые примеры использования спонтанной намагниченности:

*Магнитные записывающие устройства:* Ферромагнетики используются в жестких дисках, магнитных лентах и магнитных картах для записи и хранения информации. При помощи внешнего магнитного поля можно изменять ориентацию спиновых моментов в ферромагнитных материалах и записывать информацию.

*Магнитные сенсоры:* Ферромагнетики применяются в магнитных датчиках и сенсорах. Изменения в магнитном поле, вызванные движением или изменением положения объектов, обнаруживаются с помощью эффектов, связанных с изменением спонтанной намагниченности.

*Магнитоэлектрические устройства:* Спонтанная намагниченность может использоваться для создания магнитоэлектрических устройств, где изменение магнитного поля приводит к изменению электрических свойств и наоборот. Это имеет потенциальное применение в области электроники и сенсорики.

*Магнитные памяти:* Спонтанная намагниченность играет важную роль в разработке магнитных памяти, таких как магнитоупругие случайные доступные памяти (MRAM), где информация хранится в ориентации спиновых моментов.

*Магнитная резонансная томография (МРТ):* В медицине используется спонтанная намагниченность для создания сигналов в магнитном резонансе. В

МРТ используется сильное магнитное поле и детектируются сигналы, генерируемые спинами атомов в организме, что позволяет получать детальные изображения тканей и органов [8, p. 23; 9, 10].

Кроме указанных примеров, спонтанная намагниченность может использоваться в различных областях, таких как магнитооптика, магнитная нанотехнология, магнитные сепараторы и т.д.

*Магнитные датчики:* Ферромагнитные материалы используются в датчиках для измерения и контроля магнитных полей. Они могут быть применены в компасах, автомобильных датчиках положения, электромагнитных клапанах и других устройствах, где требуется обнаружение и манипуляция магнитных полей.

*Спинтроника:* Спонтанная намагниченность играет ключевую роль в области спинтроники, которая изучает управление и манипуляцию спиновыми электронными состояниями. Ферромагнитные материалы используются для генерации и обнаружения спиновых токов, магниторезистивных эффектов, магниторезонансной связи и других явлений, связанных с манипуляцией спиновых свойств электронов.

*Магнитные сверхпроводники:* В некоторых случаях, ферромагнитные материалы применяются в сверхпроводниках, чтобы создать состояния с коэкзистенцией сверхпроводимости и ферромагнетизма. Это может привести к возникновению интересных физических эффектов и предоставить новые возможности в области магнитоэлектроники и квантовых вычислений.

*Магнитные материалы для различных приложений:* Ферромагнитные материалы находят применение во многих других областях, включая электроэнергетику, электромеханику, авиацию и многие другие.

В последние десятилетия возрос интерес к изучению нелинейных моделей, описывающих процессы намагничивания и спинового взаимодействия. Эти взаимодействия могут быть описаны интегрируемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. Такие интегрируемые уравнения допускают, в частности, солитонные или солитоноподобные решения. Изучение солитонов и связанных с ними решений стало одной из активных областей исследований в физике и математике. Существует несколько способов нахождения солитонных и других точных решений интегрируемых уравнений: метод Хироты, обратное преобразование рассеяния, билинейный метод, преобразование Дарбу и т.д. В данной работе преимущественно использованы два метода, а именно прямой метод Хироты и преобразование Дарбу.

## 2 ЛОКАЛЬНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ

В данном разделе будут рассмотрены локальные спиновые системы, на примере обобщенного уравнения Ландау-Лифшица (ОУЛЛ) с самосогласованным векторным потенциалом (СВП) и уравнения иерархии ферромагнетика Гейзенберга (УИФГ), а также механизмы появления спиновых волн на примере рассматриваемых моделей, визуализация полученных результатов. К спиновым волнам относятся волны нарушения магнитной упорядоченности в ферромагнетиках. В основном состоянии спины атомов данных веществ упорядочены, а при внесении таких материалов в магнитное поле они поляризуются. Таким образом происходит отклонение магнитного момента и распространение в среде. Также спиновые волны называют магнонами. Магноны чаще всего наблюдаются в кристаллах. Как и обычные механические волны, спиновые волны характеризуются законом дисперсии, т.е. зависимостью частоты от волнового вектора [13-16]. При балансе нелинейности модели и дисперсии среды появляются устойчивые спиновые волны – солитоны.

### 2.1 Решение обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с потенциалом методом преобразования Дарбу

Одним из эффективных методов построения точных решений интегрируемых уравнений является метод преобразования Дарбу, разработанный выдающимся французским математиком XIX века Ж.Г. Дарбу для решения задач в геометрии. Однако, в 70-х годах XX века, во время бурного развития метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) в применении к уравнениям нелинейной волновой динамики В.Б. Матвеевым был предложен альтернативный МОЗР метод построения решений солитонного типа с помощью преобразований Дарбу (ПД) [17].

Решения интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений, представляющие собой уединенную волну и обладающие свойством упругости взаимодействия с другим таким же решением имеют различные приложения во многих областях естественных наук. Аналитические исследования процессов взаимодействия уединенных волн являются одними из основных задач теории солитонов. Развитие нелинейной теории магнетизма, в свою очередь, поставило проблему построения интегрируемых ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом. Одно из таких обобщений с самосогласованным скалярным потенциалом было предложено в [18, p. 1358]. Различные алгебро-геометрические аспекты таких моделей изучены в работах [18, p. 2122; 19]. ОУЛЛ с самосогласованным векторным потенциалом (СВП) получены в работе [18], а также установлены их связи с движением кривых и поверхностей [20]. В данном пункте помощью ПД построим решение для рассматриваемой системы.

Рассмотрим динамику спинового оператора  $S$  свободного электрона под действием зависящего от времени внешнего магнитного поля заданным гамильтонианом [21]

$$H_s = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{B}(t) = \mu_0 \mathbf{H}(t). \quad (3)$$

Зависимость спинового вектора задается как

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{S}(t) \rangle = \frac{g\mu_B}{\hbar} \langle \mathbf{S}(t) \rangle \times \mathbf{B}(t). \quad (4)$$

Динамика намагниченности

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma_0 [\mathbf{M}(t) \times \mathbf{H}(t)]. \quad (5)$$

Магнетизация

$$\mathcal{M} = (g\mu_B / \hbar) \langle \mathbf{S} \rangle \equiv \gamma \langle \mathbf{S} \rangle. \quad (6)$$

И направление вектора намагниченности выразим через единичный вектор

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|}. \quad (7)$$

Далее рассмотрим уравнение, описывающее изменение вектора спина по времени.

### 2.1.1 Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица

Уравнение Ландау-Лифшица является фундаментальным уравнением в магнетизме и описывает динамику магнитной намагниченности в ферромагнитных материалах [22]. Это уравнение было предложено известными советскими физиками Л. Ландау и Е. Лифшицем в 1935 году.

Уравнение Ландау-Лифшица имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\mu_0}{\hbar} \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{эф} - \gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{M}_{эф}), \quad (8)$$

где  $d\mathbf{M} / dt$  – производная по времени от магнитной намагниченности  $\mathbf{M}$ ;

$\gamma$  – гиромагнитное отношение;

$H_{эф}$  – эффективное магнитное поле;

$\mu_0$  – магнетон Бора.

Уравнение Ландау-Лифшица является классическим уравнением и не учитывает квантовые эффекты. Оно хорошо описывает макроскопическую динамику магнитной намагниченности в ферромагнитных материалах, но может быть модифицировано для учета специфических свойств и особенностей конкретных систем.

ОУЛЛ с СВП имеет вид

$$\mathbf{S}_t + 0.5\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \frac{2}{a}\mathbf{S} \wedge \mathbf{W} = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{W}_x + 2a\mathbf{S} \wedge \mathbf{W} = 0, \quad (10)$$

где  $\wedge$  обозначает векторное произведение и  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ,  $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)$ , длина векторов  $\mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ ,  $\mathbf{W}^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = b$ ,  $a, b = const$ , здесь и далее  $\mathbf{S}_t$ ,  $\mathbf{S}_x$  - производные величин по времени и координатам соответственно. В большинстве случаев удобно работать с матричной формой этого уравнения. Для перехода к матричной форме воспользуемся отображением вектора с помощью  $\sigma_j$ -матриц в виде  $S = \sum_{j=1}^3 S_j(x, y, t) \sigma_j$ ,  $\sigma_j = \sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Далее напомним матричную форму рассматриваемого уравнения в следующем виде

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{a}[S, W] = 0, \quad (11)$$

$$iW_x + a[S, W] = 0, \quad (12)$$

где  $a = const$ ,  $S$  матричный аналог спинорного вектора,  $W$  - матричный вид векторного потенциала  $W = \sum_{j=1}^3 W_j(x, y, t) \sigma_j$ .

Здесь и далее  $S = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sum_{j=1}^3 S_j \sigma_j$ , бесследовая эрмитова матрица, которая удовлетворяет соотношению  $S^2 = I$ ,  $\sigma_j$  - матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В матричной форме  $S$  и  $W$  запишем через компоненты

$$S(x, t) = \begin{pmatrix} S_3 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & -S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$W(x, t) = \begin{pmatrix} W_3 & W_1 - iW_2 \\ W_1 + iW_2 & -W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_3 & W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix},$$

где  $S$  обладает следующими свойствами  $S = S^\dagger$ ,  $tr S = 0$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} S(x, t) = \sigma_3$ . Отметим, что при  $W = 0$ , уравнение (11)-(12) преобразуется в УФГ [23]

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] = 0. \quad (15)$$

УФГ (15) играет важное значение в физике и математике интегрируемых

систем. Оно описывает нелинейную динамику магнитов. Также УФГ может воспроизводить некоторые интегрируемые классы кривых и поверхностей в дифференциальной геометрии [24-27].

ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом интегрируемо методом обратной задачи рассеяния и допускает следующее представление Лакса [28].

$$\Phi_x = U\Phi, \quad (16)$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad (17)$$

где матричные операторы  $U$  и  $V$  задаются как

$$U = -i\lambda S, \quad (18)$$

$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \left( \frac{i}{\lambda + a} - \frac{i}{a} \right) W. \quad (19)$$

Здесь

$$V_2 = -2iS, \quad V_1 = SS_x,$$

$\lambda$  - спектральный параметр.

Для удобства перепишем систему (11)-(12) в компонентах  $S$  и  $W$

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a} (S^+ W_3 - S_3 W^+) = 0,$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a} (S^- W_3 - S_3 W^-) = 0,$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{2}{a} (S^- W^+ - S^+ W^-) = 0,$$

$$iW_x^+ - 2a(S_3 W^+ - S^+ W_3) = 0,$$

$$iW_x^- - 2a(S^- W_3 - S_3 W^-) = 0,$$

$$iW_{3x} - a(S^+ W^- - S^- W^+) = 0,$$

или

$$S_{1t} = S_3 S_{2xx} - S_2 S_{3xx} + \frac{1}{a^2} W_{1x},$$

$$S_{2t} = S_1 S_{3xx} - S_3 S_{1xx} + \frac{1}{a^2} W_{2x},$$

$$S_{3t} = S_2 S_{1xx} - S_1 S_{2xx} + \frac{1}{a^2} W_{3x},$$

$$W_{1x} = 2a(S_3 W_2 - S_2 W_3),$$

$$W_{2x} = 2a(S_1 W_3 - S_3 W_1),$$

$$W_{3x} = 2a(S_1 W_2 - S_2 W_1).$$

### 2.1.2 Преобразование Дарбу

ПД представляет собой мощный метод для нахождения разнообразных интересных солитонных и солитоноподобных решений в интегрируемых системах. Суть этого метода заключается в построении искомого решения на основе известного тривиального решения, которое иногда называется «семенем» в англоязычной литературе [29-30]. Это означает, что мы начинаем с определенного решения, которое затем используется в процессе построения более сложных решений.

#### Однократное преобразование Дарбу

В этом пункте построим однократное ПД для ОУЛЛ с СВП. Для этого, рассмотрим следующее преобразование решений системы (16)-(17), пусть

$$\Phi' = L\Phi, \quad (20)$$

где

$$L = \lambda N - I \quad (21)$$

и

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где  $L$  - матрица ПД,  $N$  - некоторая неизвестная матрица, элементы которой необходимо определить,  $I$  - единичная матрица. Потребуем, чтобы  $\Phi'$  удовлетворяла представлению Лакса так, что

$$\Phi'_x = U'\Phi', \quad (23)$$

$$\Phi'_t = V'\Phi', \quad (24)$$

где  $U' - V'$  зависят от  $S'$  и  $W'$  так же, как  $U - V$  от  $S$  и  $W$ . Тогда для матрицы  $L$  выполняется следующее

$$L_x + LU = U'L, \quad (25)$$

$$L_t + LV = V'L. \quad (26)$$

Эти уравнения дают следующие выражения для  $N$

$$N_x = iS' - iS, \quad (27)$$

$$N_t = -S'S'_x - \frac{i}{a}W'N + \frac{i}{a}NW + SS'_x \quad (28)$$

и

$$S' = NSN^{-1}. \quad (29)$$

$$W' = (I + aN)W(I + aN)^{-1}. \quad (30)$$

Также получим вторую форму ПД для  $S$ :

$$S' = S - iN_x. \quad (31)$$

*Однократное ПД в терминах матрицы  $N$*

Теперь мы можем построить ПД для ОУЛЛ с СВП в явном виде.

Учитывая форму матрицы  $N$  (22) получим

$$N^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n_{11}^* & -n_{12} \\ n_{12}^* & n_{11} \end{pmatrix} \quad (32)$$

и

$$I + aN = -L_{\lambda=-a} = \begin{pmatrix} an_{11} + 1 & \omega n_{12} \\ -an_{12}^* & \omega n_{11}^* + 1 \end{pmatrix}, \quad (I + aN)^{-1} = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} an_{11}^* + 1 & -an_{12} \\ an_{12}^* & an_{11} + 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Здесь

$$n = \det N = |n_{11}|^2 + |n_{12}|^2, \quad \Omega = \det(I + \omega N) = \omega^2 |n_{11}|^2 + \omega(n_{11} + n_{11}^*) + 1 + \omega^2 |n_{12}|^2. \quad (34)$$

Далее получим

$$S' = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} S_3(|n_{11}|^2 - |n_{12}|^2) + S^- n_{11} n_{12}^* + S^+ n_{11}^* n_{12} & S^- n_{11}^2 - S^+ n_{12}^2 - 2S_3 n_{11} n_{12} \\ S^+ n_{11}^* n_{12}^* - S^- n_{12}^* n_{11}^* - 2S_3 n_{11}^* n_{12}^* & S_3(|n_{12}|^2 - |n_{11}|^2) - S^- n_{11} n_{12}^* - S^+ n_{11}^* n_{12} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$W' = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= (a^2(|n_{11}|^2 - |n_{12}|^2) + a(n_{11} + n_{11}^*) + 1)W_3 + (an_{11}^* + 1)an_{12}W^+ + (an_{11} + 1)an_{12}^*W^-, \\ B_{12} &= -2a^2 n_{11} n_{12} W_3 - 2an_{12} W_3 + a^2 n_{11}^2 W^- + 2an_{11} W^- + W^- - a^2 n_{12}^2 W^+, \\ B_{21} &= -2a^2 n_{11}^* n_{12}^* W_3 - 2an_{12}^* W_3 + a^2 (n_{11}^*)^2 W^+ + 2an_{11}^* W^+ + W^+ - a^2 (n_{12}^*)^2 W^-, \\ B_{22} &= -((a^2(|n_{11}|^2 - |n_{12}|^2) + a(n_{11} + n_{11}^*) + 1)W_3 + (an_{11}^* + 1)an_{12}W^+ + (an_{11} + 1)an_{12}^*W^-). \end{aligned}$$

Также вторая форма ПД для  $S$ :

$$S' = S - i \begin{pmatrix} n_{11x} & n_{12x} \\ -n_{12x}^* & n_{11x}^* \end{pmatrix}, \quad (37)$$

таким образом

$$\begin{aligned} S^{+'} &= S^+ + in_{12x}^*, \\ S^{-'} &= S^- - in_{12x}, \\ S_3' &= S_3 - in_{11x}. \end{aligned} \quad (38)$$

*Однократное ПД в терминах собственной функции*

Пусть  $(\psi_1, \psi_2)^T$  будет решением линейной системы (16)-(17) при  $\lambda$ . Тогда  $(-\psi_2^*, \psi_1^*)^T$  при  $\lambda^*$ . Рассмотрим следующее решение матрицы

$$H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1(\lambda_2; t, x, y) \\ \psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_2(\lambda_2; t, x, y) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Что удовлетворяет системе:

$$H_x = -iSH\Lambda, \quad (40)$$

$$H_t = -2iSH\Lambda^2 + SS_x H\Lambda - \frac{i}{a}WH + WH\Sigma, \quad (41)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \frac{i}{\lambda_1 + a} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\lambda_2 + a} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$\det H \neq 0$  и  $\lambda_k$  комплексные постоянные. Представим матрицу  $N$  как

$$N = H\Lambda^{-1}H^{-1} \quad (43)$$

и получим, условия для  $N$

$$N_x = iNSN^{-1} - iS, \quad (44)$$

$$N_t = SS_x - NSS_xN^{-1} - \frac{i}{a}(WN - NW) + WH\Sigma\Lambda^{-1}H^{-1} - NWH\Sigma H^{-1}, \quad (45)$$

которые эквивалентны (16)-(17) как и ожидалось. Для выполнения ограничений на матрицы  $S$  и  $W$ , матричные решения системы (11)-(12) должны удовлетворять условию

$$\Phi^\dagger = \Phi^{-1}, \quad S^\dagger = S, \quad (46)$$

которое следует из

$$\Phi_x^\dagger = i\lambda\Phi^\dagger S^\dagger, \quad (\Phi^{-1})_x = i\lambda\Phi^{-1}S^{-1}. \quad (47)$$

Здесь  $\dagger$  означает эрмитово сопряженное. После несложных вычислений получим

$$\lambda_2 = \lambda_1^*, \quad H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1; t, x, y) & -\psi_2^*(\lambda_1; t, x, y) \\ \psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1^*(\lambda_1; t, x, y) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \psi_1^*(\lambda_1; t, x, y) & \psi_2^*(\lambda_1; t, x, y) \\ -\psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1(\lambda_1; t, x, y) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где

$$\Delta = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2. \quad (50)$$

И наконец, для матрицы  $N$  получим следующие выражения

$$N = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} |\psi_1|^2 + \lambda_2^{-1} |\psi_2|^2 & (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \psi_1 \psi_2^* \\ (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \psi_1^* \psi_2 & \lambda_1^{-1} |\psi_2|^2 + \lambda_2^{-1} |\psi_1|^2 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Также можем привести ПД в терминах собственной функции

$$S^{+'} = S^+ + i \left( \frac{(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \psi_1^* \psi_2}{\Delta} \right)_x, \quad (52)$$

$$S^{-'} = S^- - i \left( \frac{(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \psi_1 \psi_2^*}{\Delta} \right)_x, \quad (53)$$

$$S_3' = S_3 - i \left( \frac{\lambda_1^{-1} |\psi_1|^2 + \lambda_2^{-1} |\psi_2|^2}{\Delta} \right)_x, \quad (54)$$

аналогично для  $W$ .

Далее обобщим полученные результаты для однократного ПД

$$\Phi^{[1]} = L_1 \Phi, \quad (55)$$

где

$$L_1 = \lambda l_1^1 + l_1^0 = \lambda l_1^1 - I \quad (56)$$

и  $l_1^0 = -I$ . Решение

$$S^{[1]} = l_1^1 S(l_1^1)^{-1}, \quad (57)$$

$$W^{[1]} = L_1|_{\lambda=-a} W L_1^{-1}|_{\lambda=-a} \quad (58)$$

или

$$S^{[1]} = L_{1\lambda} S(L_{1\lambda})^{-1}, \quad (59)$$

$$W^{[1]} = L_1|_{\lambda=-a} W L_1^{-1}|_{\lambda=-a}. \quad (60)$$

### 2.1.3 Солитонное решение

В данной работе получено солитонное решение ОУЛЛ. Для построения решения на основе ПД, возьмем плоское волновое ненулевое решение, иначе говоря тривиальное решение в виде

$$\begin{aligned} S^+ &= 2\alpha e^{-i\theta}, \\ S^- &= 2\alpha e^{i\theta}, \\ S_3 &= \beta, \\ W^+ &= \frac{2\alpha\mu^2}{a}(a^2\beta + b)e^{-i\theta}, \\ W^- &= \frac{2\alpha\mu^2}{a}(a^2\beta + b)e^{i\theta}, \\ W_3 &= \frac{\mu}{2}\left(\frac{2\mu\beta}{a} - 1\right)(a^2\beta + b) \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta, \mu, a, b$  постоянные, причем  $4\alpha^2 + \beta^2 = 1, \theta = ax + bt$ .

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$\psi_1 = (P_1 t + K_1 x + Z_1) e^{\frac{i}{2}\theta}, \quad (62)$$

$$\psi_2 = (P_2 t + K_2 x - Z_2) e^{-\frac{i}{2}\theta}, \quad (63)$$

Подставив (62)-(63) в систему уравнений (16)-(17), получим

$$\begin{aligned}
\psi_{1x} &= -i\lambda(S_3\psi_1 + S^- \psi_2), \\
\psi_{2x} &= -i\lambda(S^+\psi_1 - S_3\psi_2), \\
\psi_{1t} &= -2i\lambda^2(S_3\psi_1 + S^- \psi_2) + \lambda(S^- S_x^+ \psi_1 + S_3 S_x^- \psi_2) + \left(\frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu}\right)(W_3\psi_1 + W^- \psi_2), \\
\psi_{2t} &= -2i\lambda^2(S^+\psi_1 - S_3\psi_2) + \lambda(-S_3 S_x^+ \psi_1 + S^+ S_x^- \psi_2) + \left(\frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu}\right)(W^+ \psi_1 - W_3\psi_2).
\end{aligned} \tag{64}$$

Уравнения для  $\psi_{1x}$

$$\psi_{1x} = \left(K_1 + \frac{ia}{2}(P_1 t + K_1 x + Z_1)\right) e^{\frac{i}{2}\theta}. \tag{65}$$

Приравнивая правые и левые части выражений (64) и (65), получим

$$K_1 + \frac{ia}{2}(P_1 t + K_1 x + Z_1) = -i\lambda\beta(P_1 t + K_1 x + Z_1) - 2i\alpha\lambda(P_2 t + K_2 x - Z_2). \tag{66}$$

Из уравнения (62) имеем

$$\begin{aligned}
x &: \frac{ia}{2}K_1 = -i\lambda\beta K_1 - 2i\alpha\lambda K_2, \\
t &: \frac{ia}{2}P_1 = -i\lambda\beta P_1 - 2i\alpha\lambda P_2, \\
0 &: K_1 + \frac{ia}{2}Z_1 = -i\lambda\beta Z_1 + 2i\alpha\lambda Z_2.
\end{aligned} \tag{67}$$

Для уравнения  $\psi_{2x}$

$$\psi_{2x} = \left(K_2 - \frac{ia}{2}(P_2 t + K_2 x - Z_2)\right) e^{-\frac{i}{2}\theta}. \tag{68}$$

Аналогично

$$K_2 - \frac{ia}{2}(P_2 t + K_2 x - Z_2) = -2i\alpha\lambda(P_1 t + K_1 x + Z_1) + i\beta\lambda(P_2 t + K_2 x - Z_2). \tag{69}$$

Из (63)

$$\begin{aligned}
x &: -\frac{ia}{2}K_2 = -2i\alpha\lambda K_1 + i\beta\lambda K_2, \\
t &: -\frac{ia}{2}P_2 = -2i\alpha\lambda P_1 + i\beta\lambda P_2, \\
0 &: K_2 + \frac{ia}{2}Z_2 = -2i\alpha\lambda Z_1 - i\beta\lambda Z_2.
\end{aligned} \tag{70}$$

После небольших вычислений, имеем

$$\lambda = -\frac{aK_1}{2(\beta K_1 + 2\alpha K_2)},$$

$$\lambda = -\frac{aP_1}{2(\beta P_1 + 2\alpha P_2)},$$

$$\lambda = \frac{2K_1 + iaZ_1}{2(2i\alpha Z_2 - i\beta Z_1)}.$$

$$\lambda = \frac{aK_2}{2(2\alpha K_1 - \beta K_2)},$$

$$\lambda = \frac{aP_2}{2(2\alpha P_1 - \beta P_2)},$$

$$\lambda = -\frac{2K_2 + iaZ_2}{2(2i\alpha Z_1 + i\beta Z_2)},$$

и  $K_1 = iK_2, P_1 = iP_2, Z_1 = iZ_2$ . Далее получим явную форму  $\lambda$  для рассматриваемого случая

$$\lambda = -\frac{a}{2}(\beta + 2i\alpha). \quad (71)$$

$$K_1 = -2a\alpha Z_1(\beta + 2i\alpha), \quad (72)$$

$$K_2 = -2a\alpha Z_2(\beta + 2i\alpha). \quad (73)$$

Для уравнения  $\psi_{1t}$

$$\psi_{1t} = \left( P_1 + \frac{ib}{2}(P_1t + K_1x + Z_1) \right) e^{\frac{i}{2}\theta}. \quad (74)$$

$\psi_{1t}$ :

$$P_1 + \frac{ib}{2}(P_1t + K_1x + Z_1) = -2i\lambda^2 [\beta(P_1t + K_1x + Z_1) + 2\alpha(P_2t + K_2x - Z_2)] + \quad (75)$$

$$+ \lambda [-4ia\alpha^2(P_1t + K_1x + Z_1) + 2ia\alpha\beta(P_2t + K_2x - Z_2)] + \quad (76)$$

$$+ \left[ \frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu} \right] \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{2\mu\beta}{a} - 1 \right) (a^2\beta + b)(P_1t + K_1x + Z_1) + \frac{2\alpha\mu^2}{a} (a^2\beta + b)(P_2t + K_2x - Z_2) \right], \quad (77)$$

Также выпишем уравнения по коэффициентам

$$\begin{aligned}
x : \quad & \frac{ib}{2}K_1 = -2i\lambda^2[\beta K_1 + 2\alpha K_2] - 2ia\alpha\lambda[2\alpha K_1 - \beta K_2] + \\
& + \left[ \frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu} \right] \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{2\mu\beta}{a} - 1 \right) (a^2\beta + b)K_1 + \frac{2\alpha\mu^2}{a} (a^2\beta + b)K_2 \right], \\
t : \quad & \frac{ib}{2}P_1 = -2i\lambda^2[\beta P_1 + 2\alpha P_2] - 2ia\alpha\lambda[2\alpha P_1 - \beta P_2] + \\
& + \left[ \frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu} \right] \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{2\mu\beta}{a} - 1 \right) (a^2\beta + b)P_1 + \frac{2\alpha\mu^2}{a} (a^2\beta + b)P_2 \right], \\
0 : \quad & P_1 + \frac{ib}{2}Z_1 = -2i\lambda^2[\beta Z_1 - 2\alpha Z_2] - 2ia\alpha\lambda[2\alpha Z_1 + \beta Z_2] + \\
& + \left[ \frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu} \right] \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{2\mu\beta}{a} - 1 \right) (a^2\beta + b)Z_1 - \frac{2\alpha\mu^2}{a} (a^2\beta + b)Z_2 \right].
\end{aligned} \tag{78}$$

Также для  $\psi_{2t}$ :

$$\psi_{2t} = \left( P_2 - \frac{ib}{2}(P_2t + K_2x - Z_2) \right) e^{-\frac{i}{2}\theta}, \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
P_2 - \frac{ib}{2}(P_2t + K_2x - Z_2) = & -2i\lambda^2[2\alpha(P_1t + K_1x + Z_1) - \beta(P_2t + K_2x - Z_2)] + \\
& + \lambda[2ia\alpha\beta(P_1t + K_1x + Z_1) + 4ia\alpha^2(P_2t + K_2x - Z_2)] + \\
& + \left[ \frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu} \right] \left[ \frac{2\alpha\mu^2}{a} (a^2\beta + b)(P_1t + K_1x + Z_1) - \frac{\mu}{2} \left( \frac{2\mu\beta}{a} - 1 \right) (a^2\beta + b)(P_2t + K_2x - Z_2) \right].
\end{aligned} \tag{80}$$

Аналогично для второго уравнения

$$\begin{aligned}
x : \quad & -\frac{ib}{2}K_2 = -2i\lambda^2[2\alpha K_1 - \beta K_2] + 2ia\alpha\lambda[\beta K_1 + 2\alpha K_2] + \\
& + \left[ \frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu} \right] \left[ \frac{2\alpha\mu^2}{a} (a^2\beta + b)K_1 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{2\mu\beta}{a} - 1 \right) (a^2\beta + b)K_2 \right], \\
t : \quad & -\frac{ib}{2}P_2 = -2i\lambda^2[2\alpha P_1 - \beta P_2] + 2ia\alpha\lambda[\beta P_1 + 2\alpha P_2] + \\
& + \left[ \frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu} \right] \left[ \frac{2\alpha\mu^2}{a} (a^2\beta + b)P_1 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{2\mu\beta}{a} - 1 \right) (a^2\beta + b)P_2 \right], \\
0 : \quad & P_2 + \frac{ib}{2}Z_2 = -2i\lambda^2[2\alpha Z_1 + \beta Z_2] + 2ia\alpha\lambda[\beta Z_1 - 2\alpha Z_2] + \\
& + \left[ \frac{i}{\lambda + \mu} - \frac{i}{\mu} \right] \left[ \frac{2\alpha\mu^2}{a} (a^2\beta + b)Z_1 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{2\mu\beta}{a} - 1 \right) (a^2\beta + b)Z_2 \right].
\end{aligned} \tag{81}$$

Здесь распишем некоторые из получившихся выражений

$$\psi_1^* \psi_2 = \left( -\frac{i}{2} \Delta + 2iZ_1^2 \right) e^{-i\gamma},$$

$$\psi_1 \psi_2^* = \left( \frac{i}{2} \Delta - 2iZ_1^2 \right) e^{i\gamma},$$

$$n_{11} = \frac{2}{a} \left( \frac{8i\alpha Z_1 (K_1 x + P_1 t)}{\Delta} - \beta \right),$$

$$n_{11}^* = -\frac{2}{a} \left( \frac{8i\alpha Z_1 (K_1 x + P_1 t)}{\Delta} + \beta \right),$$

$$n_{12} = \frac{4\alpha}{a} \left( \frac{4Z_1^2}{\Delta} - 1 \right) e^{i\gamma},$$

$$n_{12}^* = \frac{4\alpha}{a} \left( \frac{4Z_1^2}{\Delta} - 1 \right) e^{-i\gamma},$$

где

$$\Delta = 2K_1^2 x^2 + 2P_1^2 t^2 + 4P_1 K_1 x t + 2Z_1^2.$$

$$\Delta_x = 4K_1^2 x + 4K_1 P_1 t,$$

$$n_{12x} = \frac{4\alpha}{a} \left( -\frac{16K_1 Z_1^2 (K_1 x + P_1 t)}{\Delta^2} + \frac{4i\alpha Z_1^2}{\Delta} - ia \right) e^{i\gamma},$$

$$n_{12x}^* = \frac{4\alpha}{a} \left( -\frac{16K_1 Z_1^2 (K_1 x + P_1 t)}{\Delta^2} - \frac{4i\alpha Z_1^2}{\Delta} + ia \right) e^{-i\gamma},$$

$$n_{11x} = \frac{-8i\alpha}{a} \frac{K_1 Z_1}{\Delta} \left( 1 - \frac{4}{\Delta} (K_1^2 x^2 + 2P_1 t + P_1^2 t^2) \right),$$

$$n_{11x}^* = \frac{8i\alpha}{a} \frac{K_1 Z_1}{\Delta} \left( 1 - \frac{4}{\Delta} (K_1^2 x^2 + 2P_1 t + P_1^2 t^2) \right).$$

Решение в компонентах спиновой матрицы

$$S^{+'} = \left( 6\alpha + \frac{64i\alpha Z_1^2 K_1 (K_1 x + P_1 t)}{a\Delta^2} - 16\frac{\alpha Z_1^2}{\Delta} \right) e^{-i\gamma}, \quad (82)$$

$$S^{-'} = \left( 6\alpha - \frac{64i\alpha Z_1^2 K_1 (K_1 x + P_1 t)}{a\Delta^2} - 16\frac{\alpha Z_1^2}{\Delta} \right) e^{i\gamma}, \quad (83)$$

$$S_3' = -16\frac{\alpha K_1}{a\Delta} + 64\frac{\alpha K_1 (K_1 x + P_1 t)^2}{a\Delta^2}, \quad (84)$$

и векторного потенциала соответственно

$$\begin{aligned}
W^{+'} &= -\frac{8\mu\delta}{a\Omega} e^{iy} \left[ \alpha + \frac{4(\alpha Z_1^2 + i\mu Z_1(K_1x + Pt))}{\Delta} + \frac{16iZ_1^3(\mu K_1x + Pt)}{\Delta^2} \right] + \\
&+ \frac{4\mu^2\nu\delta}{a\Omega} e^{-iy} \left[ \frac{3}{2}\alpha - \frac{2i\mu Z_1(K_1x + Pt)}{\Delta} - \frac{2\alpha\mu^2}{a} \left( 1 - \frac{8Z_1^2}{a\Delta} \left( 1 + \frac{2Z_1^2}{\Delta} \right) \right) \right], \\
W^{-'} &= \frac{8\mu\delta}{a\Omega} e^{iy} \left[ \alpha + \frac{4Z_1}{\Delta} \left[ i\mu(Pt + K_1x)(1 - 4Z_1^4) - \alpha Z_1 \right] \right] - \frac{32\alpha\mu^4\nu}{a^3\Omega} e^{iy} \left[ 1 - \frac{Z_1^2}{\Delta} \left( 2 + \frac{Z_1^2}{\Delta} \right) \right] + \\
&+ \frac{64\alpha\mu^3\nu e^{iy}}{a\Delta\Omega} \left[ (Pt + K_1x) \left( i\alpha Z_1 - \frac{\mu Z_1}{\Delta} (Pt + K_1x) \right) + 1 \right], \\
W_3' &= \delta + \frac{32\mu^2\delta Z_1^2}{a^2\Delta} \left[ \frac{2a^2}{\Delta} (Pt + K_1x)^2 - \frac{2Z_1^2}{\Delta} + 1 \right] + \\
&+ \frac{4\mu^3\nu \cos iy}{a^2} \left[ \frac{16\alpha i\mu Z_1}{\Delta} (Pt + K_1x) + 1 \right] \left[ 1 - \frac{4Z_1^2}{\Delta} \right].
\end{aligned} \tag{85}$$

Визуализация полученных решений представлена на рисунках 1-6 для компоненты спиновой матрицы  $S_3$ . На рисунке 1 отчетливо видно движение солитона в отрицательном направлении оси  $Ox$ , при значениях времени от 0 до 5. Также на рисунках 2-5 представлены двухмерные графики зависимости компонентов спина от времени, при различных значениях времени, спиновая волна сохраняет высоту неизменной – т.е. является солитоном.

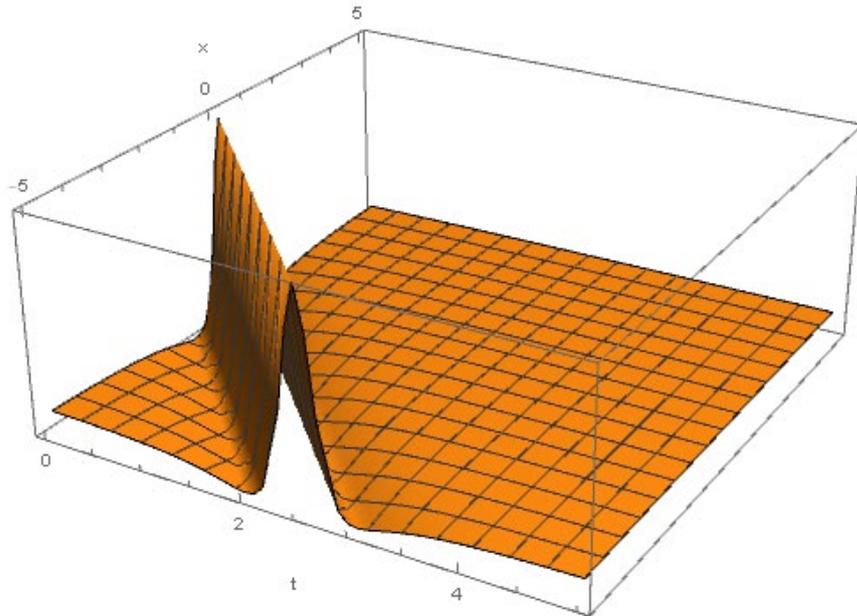


Рисунок 1 – Решение  $S_3$ , при  $a = 0.2, b = 0.3, \alpha = 0.5, k = 5, p = 10, z = 3$

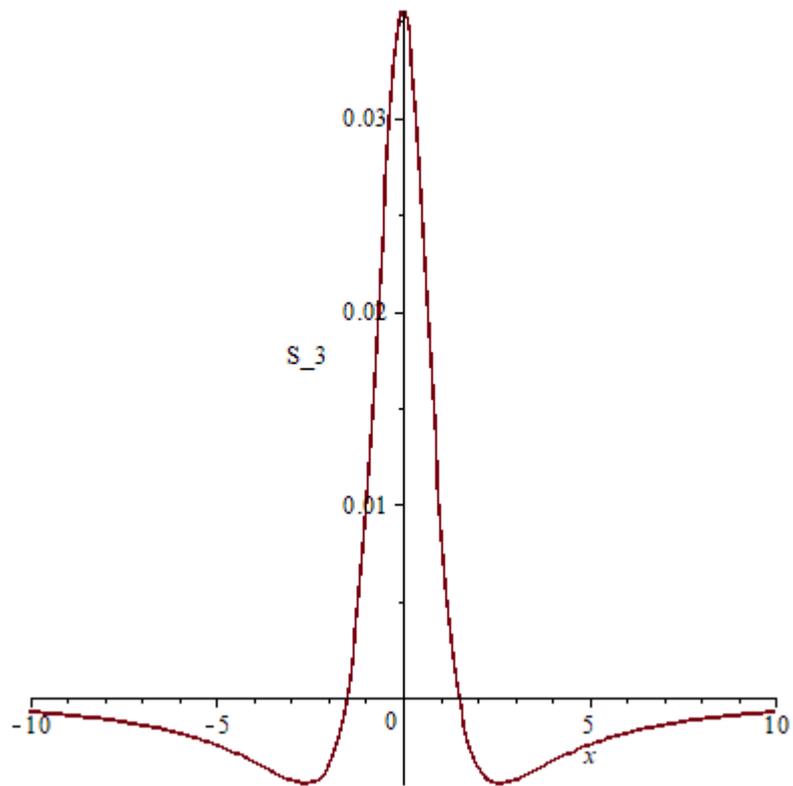


Рисунок 2 – Решение  $S_3$  при  $t=0, a=0.2, b=0.3, \alpha=0.5, k=5, p=10, z=3$

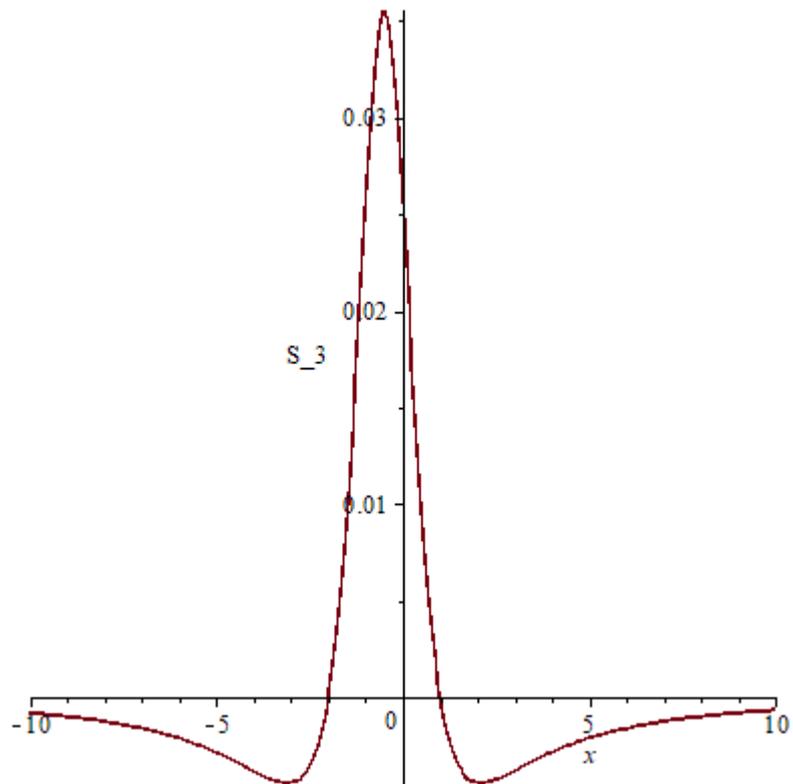


Рисунок 3 – Решение  $S_3$  при  $t=1, a=0.2, b=0.3, \alpha=0.5, k=5, p=10, z=3$

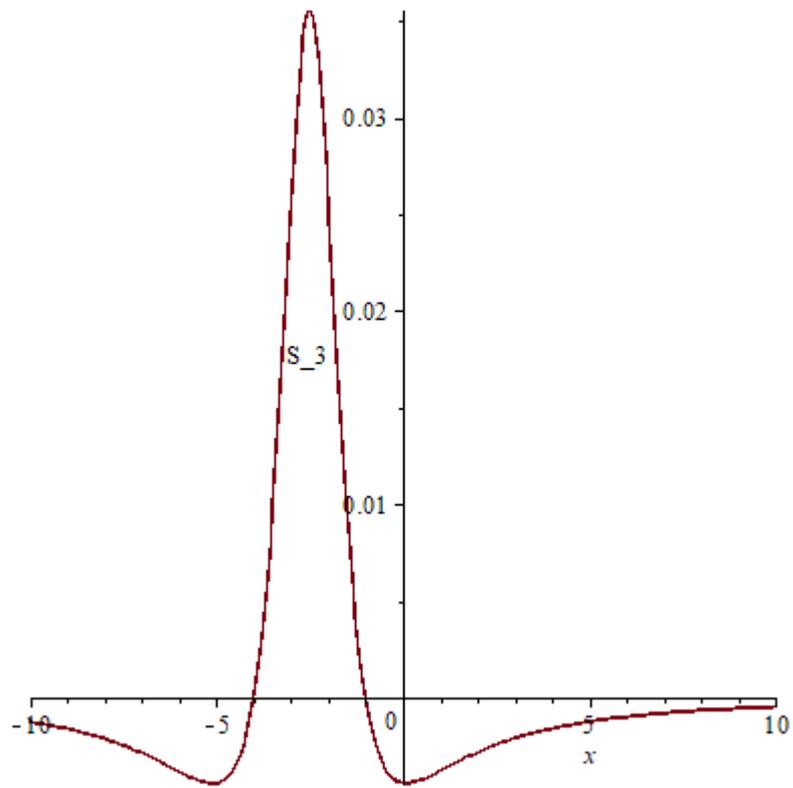


Рисунок 4 – Решение  $S_3$  при  $t = 5, a = 0.2, b = 0.3, \alpha = 0.5, k = 5, p = 10, z = 3$

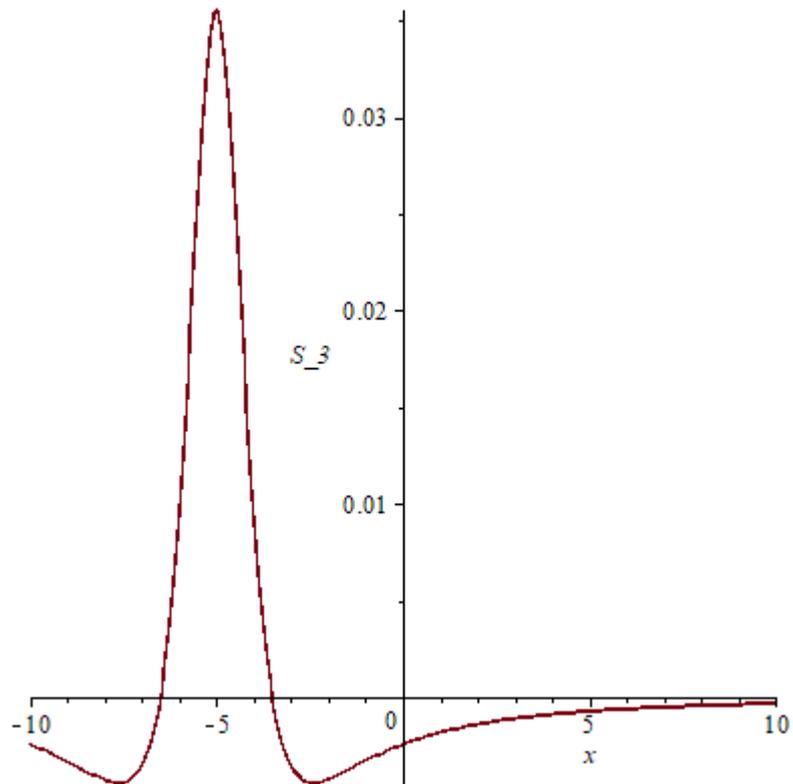


Рисунок 5 – Решение  $S_3$  при  $t = 10, a = 0.2, b = 0.3, \alpha = 0.5, k = 5, p = 10, z = 3$

На рисунке 6 график плотности солитона  $S_3$ . Графики построены при

следующих значениях параметров:  $a = 0.2, b = 0.3, \alpha = 0.5, k = 5, p = 10, z = 3$

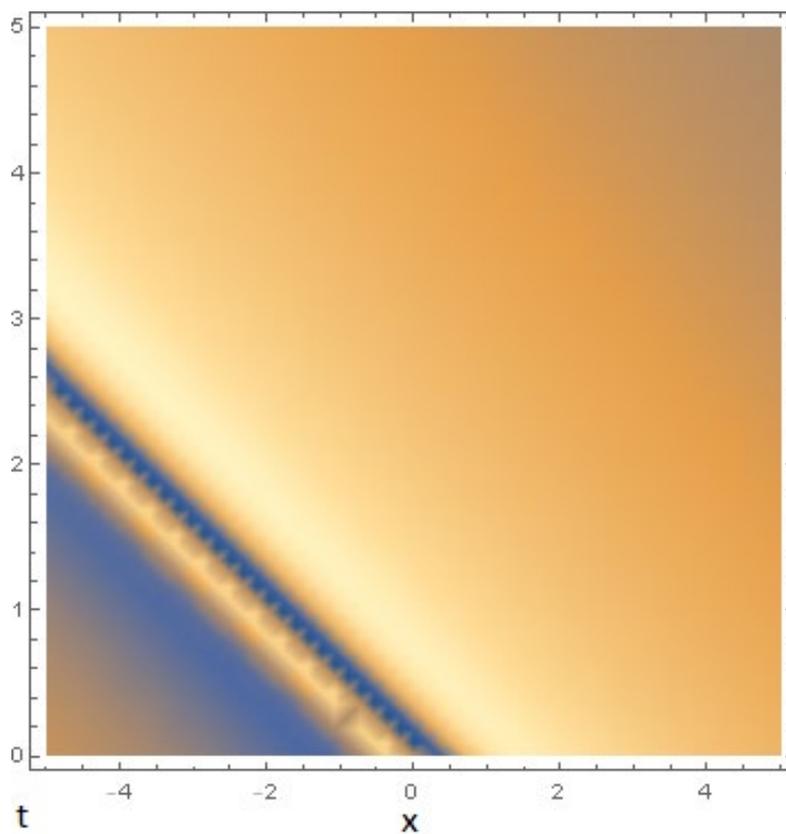


Рисунок 6 – Решение  $S_3$ , при  $a = 0.2, b = 0.3, \alpha = 0.5, k = 5, p = 10, z = 3$

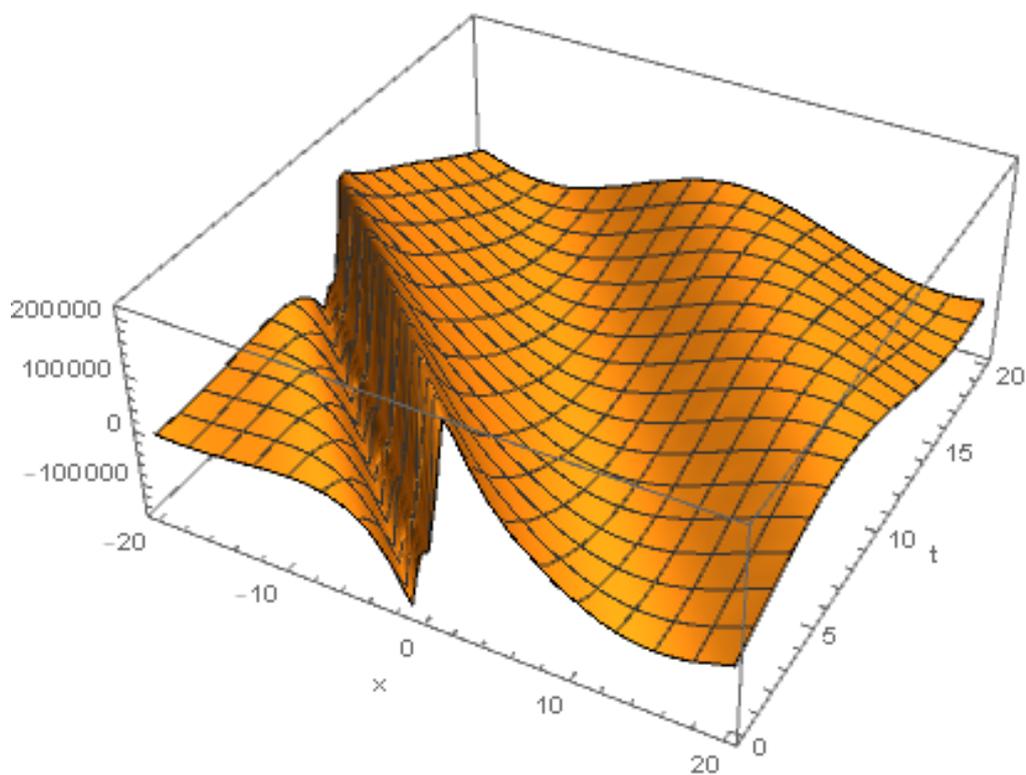


Рисунок 7 – Решение  $W_3$ , при  $a = 0.2, b = 0.3, \alpha = 0.5, k = 5, p = 10, z = 3$

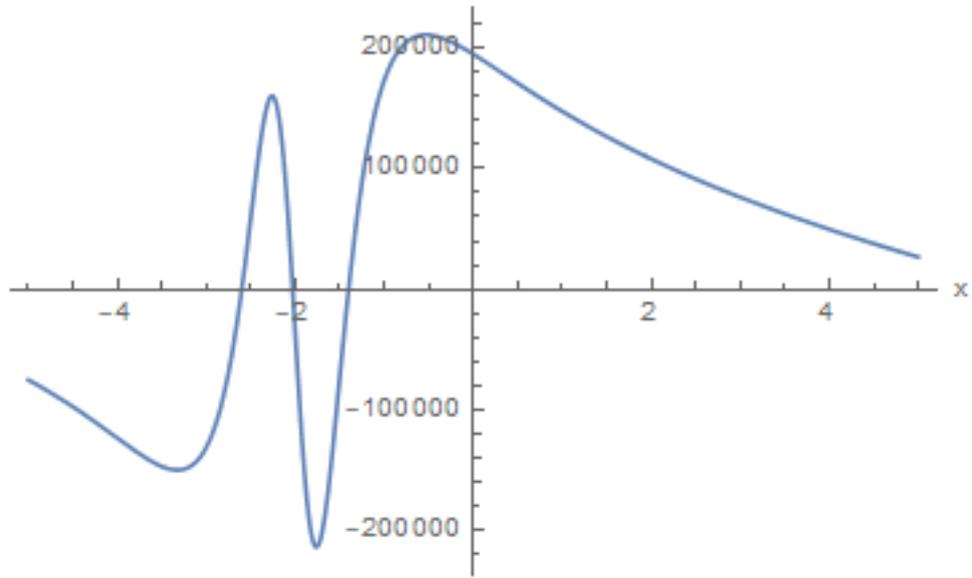


Рисунок 8 – Решение  $W_3$  при  $t=1$ ,  $a=0.2, b=0.3, \alpha=0.5, k=5, p=10, z=3$

На рисунках 7-9 представлено движение векторного потенциала. Движение потенциала согласовано с движением спинового вектора. Графики построены при следующих значениях параметров:  $a=0.2, b=0.3, \alpha=0.5, k=5, p=10, z=3$ .

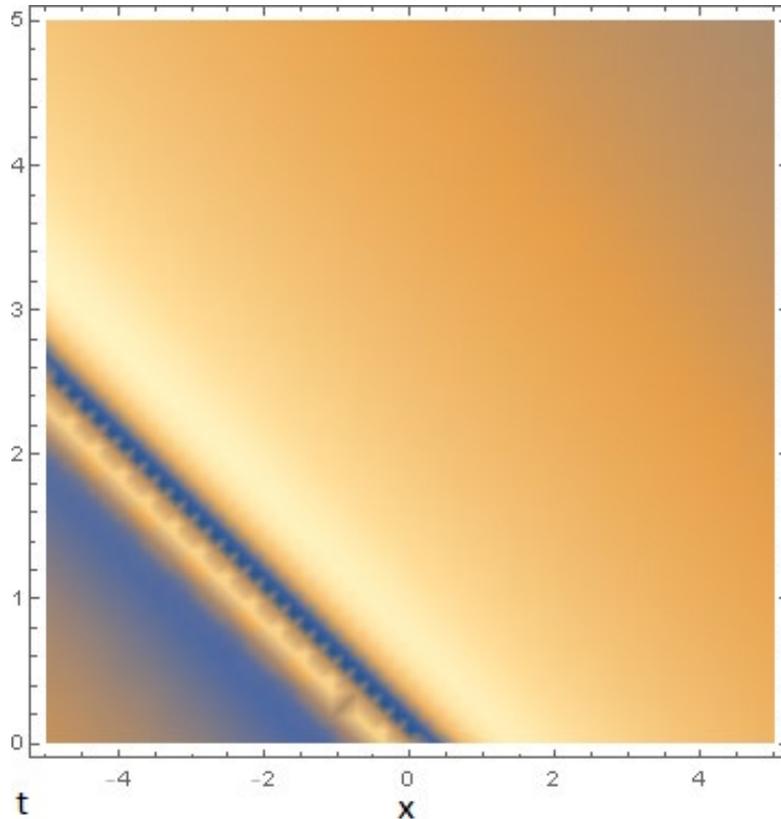


Рисунок 9 – Решение  $W_3$ , при  $a=0.2, b=0.3, \alpha=0.5, k=5, p=10, z=3$

При использовании ПД в уравнении ОУЛЛ с СВП, получены солитонные волны в качестве решений.

## 2.2 Метод Хироты для обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с потенциалом

Для уединенных волн, которые являются решениями интегрируемых нелинейных моделей характерны свойства упругого взаимодействия. Такие свойства привели к широкому кругу задач, где применяются подобные системы. Описываемые в данной работе модели, также можно отнести к данному классу уравнений. На пике развития солитонной теории Ландау и Лифшиц предложили уравнение динамики намагниченности. Рассмотрим одно из обобщений уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом. Различные физические свойства и алгебраическое описание модели можно найти в [30-38].

### 2.2.1 Билинеаризация

Билинейная форма ОУЛЛ с СВП (11)-(12) имеет вид [23, p. 012035-3]

$$[iD_t + D_x^2](g \cdot f) - \frac{2}{a} p^* q = 0, \quad (86)$$

$$D_x^2(f \cdot f) - \frac{2}{a} q^* q = 0, \quad (87)$$

$$D_x(p \cdot f) - 2ia g^* q = 0, \quad (88)$$

$$D_x(q \cdot f) + 2ia q f = 0, \quad (89)$$

где  $f$  – вещественная функция,  $g$ ,  $p$ ,  $q$  – комплексные функции, а операторы Хироты определяются как

$$D_x^l D_t^n f(x, t) \cdot g(x, t) = (\partial_x - \partial_x')^l (\partial_t - \partial_t')^n f(x, t) \cdot g(x', t') \Big|_{x=x', t=t'}. \quad (90)$$

Векторный потенциал  $W$  дается как

$$W_3 = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2, \quad W^+ = 2\varphi_1^* \varphi_2, \quad W^- = 2\varphi_1 \varphi_2^*, \quad (91)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются решениями матричной системы (16)-(17). Учитывая (91), перепишем уравнения (11)-(12) в виде

$$\begin{aligned}
iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a} (S^+ (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3 \varphi_1^* \varphi_2) &= 0, \\
iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a} (S^- (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3 \varphi_1 \varphi_2^*) &= 0, \\
2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{4}{a} (S^- \varphi_1^* \varphi_2 - S^+ \varphi_1 \varphi_2^*) &= 0, \\
\varphi_{1x} - ia(S_3 \varphi_1 + S^- \varphi_2) &= 0, \\
\varphi_{2x} - ia(S^+ \varphi_1 - S_3 \varphi_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующее стереографическое преобразование:

$$S^+ = \frac{2\omega}{1+|\omega|^2}, \quad S^- = \frac{2\omega^*}{1+|\omega|^2}, \quad S_3 = \frac{1-|\omega|^2}{1+|\omega|^2}. \quad (92)$$

Отсюда получим

$$\omega = \frac{S^+}{1+S_3}. \quad (93)$$

Таким образом получим уравнения

$$\begin{aligned}
i\omega_t - \omega_{xx} + \frac{2\omega^* \omega_x^2}{1+|\omega|^2} + \frac{2}{a} (\omega \varphi_2^* + \varphi_1^*) (\omega \varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\
\varphi_{1x} - \frac{ia}{1+|\omega|^2} ((1-|\omega|^2)\varphi_1 + 2\omega^* \varphi_2) &= 0, \\
\varphi_{2x} - \frac{ia}{1+|\omega|^2} (2\omega \varphi_1 - (1-|\omega|^2)\varphi_2) &= 0.
\end{aligned} \quad (94)$$

Теперь преобразуем (94) к специальному виду, удобному для использования Паде-аппроксиманты [39]. Для этого заменим  $\omega$  на  $\frac{g}{f}$

$$\omega = \frac{g}{f}, \quad (95)$$

где  $g$  – комплексная функция,

$f$  – действительная функция, а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  зададим в виде

$$\varphi_1 = \frac{p}{f} e^{iax}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{f} e^{iax}, \quad (96)$$

и найдем уравнения, которым удовлетворяют  $f$ ,  $g$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

## 2.2.2 Солитонное решение

Используя билинейную форму теперь построим солитонное решение для спиновой системы.

Односолитонное решение уравнения (11)-(12) для спиновой матрицы  $S$  имеет вид:

$$S^+ = \frac{2 \left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right) e^{i\theta}}{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 + e^{i(\theta - \theta^*)}}, \quad (97)$$

$$S_3 = \frac{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 - e^{i(\theta - \theta^*)}}{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 + e^{i(\theta - \theta^*)}}, \quad (98)$$

для потенциала  $W$ :

$$W^+ = - \frac{a \left( 1 - \frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)} \left( \frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)} \right) (l_1 + k_1^2) e^{i\theta}}{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2}, \quad (99)$$

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{\left( 1 - \frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)} \left( \frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)} \right)}{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2} * \\ &+ \frac{\left( 1 - \frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{(k_1^* - k_1)} \left( \frac{a(l_1 + k_1^2)}{4(k_1^* - k_1)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)} \right)}{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2} + \\ &+ \frac{\left( a^2(l_1 + k_1^2)(l_1^* + k_1^{*2})e^{i(\theta - \theta^*)} \right)}{4 \left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2}, \end{aligned} \quad (100)$$

где  $\theta = k_1x + l_1t + m_1$ ,  $k_1, l_1$  и  $m_1$  комплексные постоянные.

Согласно разложению постоянной  $\varepsilon$  по степеням:

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \varepsilon g_1(x,t) + \varepsilon^3 g_3(x,t) + \dots, \\ f(x,t) &= 1 + \varepsilon^2 f_2(x,t) + \varepsilon^4 f_4(x,t) + \dots, \\ p(x,t) &= 1 + \varepsilon^2 p_2(x,t) + \varepsilon^4 p_4(x,t) + \dots, \\ q(x,t) &= \varepsilon q_1(x,t) + \varepsilon^3 q_3(x,t) + \dots. \end{aligned} \quad (101)$$

$N$ -солитонное решение исследуемого решения ищем в виде

$$g_j = \sum_{j=1}^N \exp \theta_j, \quad \theta = k_j x + l_j t + m_j. \quad (102)$$

При  $N=1$ ,  $g_j=0$  для  $j \geq 3$  и  $f_j=0$  для  $j \geq 4$  [32, р. 012035-10]. Также при  $q_j=0$  для  $j \geq 3$  и  $p_j=0$  для  $j \geq 4$ . Для односолитонного решения уравнений (11)-(12) возьмем  $g = \varepsilon g_1$ ,  $p = 1 + \varepsilon^2 p_2$ ,  $q = \varepsilon q_1$ ,  $f = 1 + \varepsilon^2 f_2$ , подставляя эти выражения в билинейную форму (86)-(89) получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} i g_{1t} + g_{1xx} - \frac{2}{a} q_1 &= 0, \\ i g_{1t} f_2 - i g_1 f_{2t} + g_{1xx} f_2 - 2 g_{1x} f_{2x} + g_1 f_{2xx} - \frac{2}{a} p_2^* q_1 &= 0, \\ f_{2xx} - \frac{1}{a} q_1^* q_1 &= 0, \\ f_2 f_{2xx} - f_{2x} f_{2x} &= 0, \\ p_{2x} - f_{2x} - 2 i a g_1^* q_1 &= 0, \\ p_{2x} f_2 - p_2 f_{2x} &= 0, \\ q_{1x} + 2 i a q_1 &= 0, \\ q_{1x} f_2 - q_1 f_{2x} + 2 i a q_1 f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Выбрав  $g_1$  как  $g_1 = e^{i\theta}$ , с  $\theta = k_1x + l_1t + m_1$ , можем построить решения для  $f$ ,  $q_1$ ,  $p_2$  в виде:

$$q_1 = -\frac{a}{2} (l_1 + k_1^2) e^{i\theta}, \quad (103)$$

$$f_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)(l_1^* + k_1^{*2})}{(k_1 - k_1^*)^2} e^{i(\theta - \theta^*)}, \quad (104)$$

$$p_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)} \left( \frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)}. \quad (105)$$

Решения для компонентов матрицы  $S$  имеет вид

$$S^+ = \frac{2fg}{f^2 + |g|^2}, \quad S^- = \frac{2fg^*}{f^2 + |g|^2}, \quad S_3 = \frac{f^2 - |g|^2}{f^2 + |g|^2}. \quad (106)$$

Получены решения уравнений (11)-(12) в виде (97)-(100). На рисунках 10-12 представлены графики полученных решений при различных значениях параметра  $a$ .

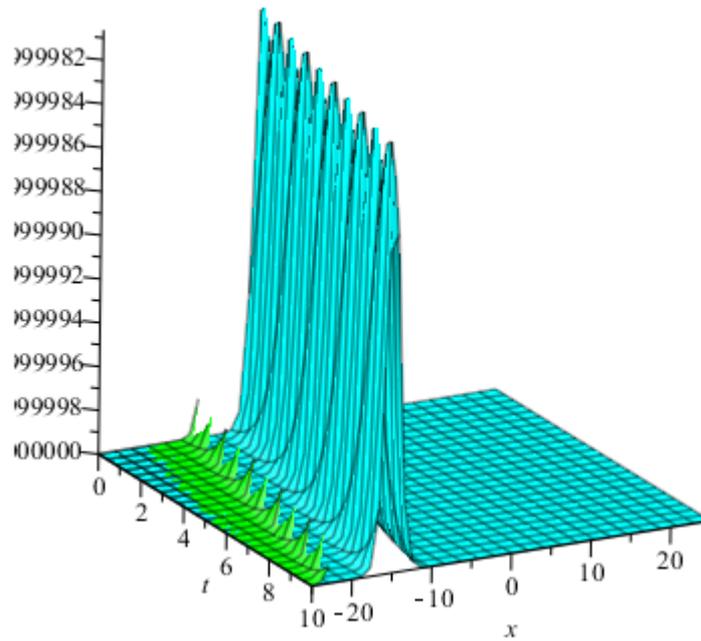


Рисунок 10 – Солитонное решение при  $a = 1$ ,  $k_1 = 25 - i$ ,  $l_1 = 15 - i$ ,  $m_1 = 1$

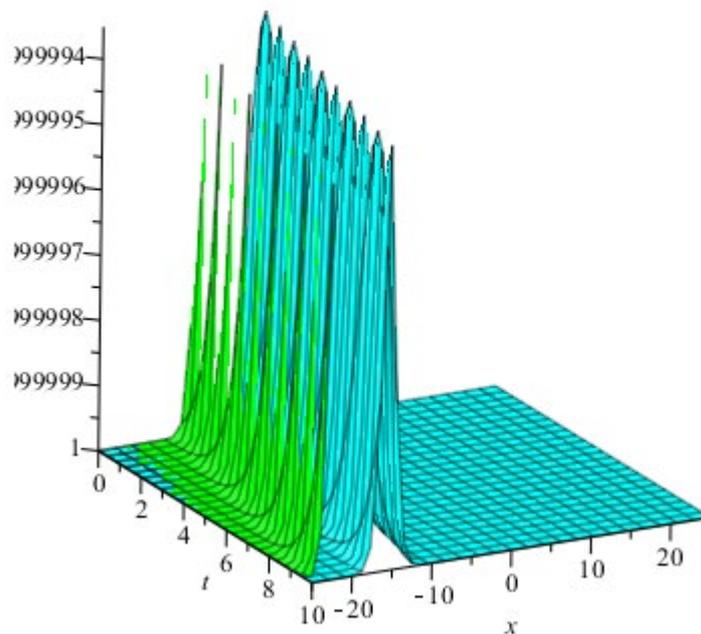


Рисунок 11 – Солитонное решение при  $a = 3$ ,  $k_1 = 25 - i$ ,  $l_1 = 15 - i$ ,  $m_1 = 1$

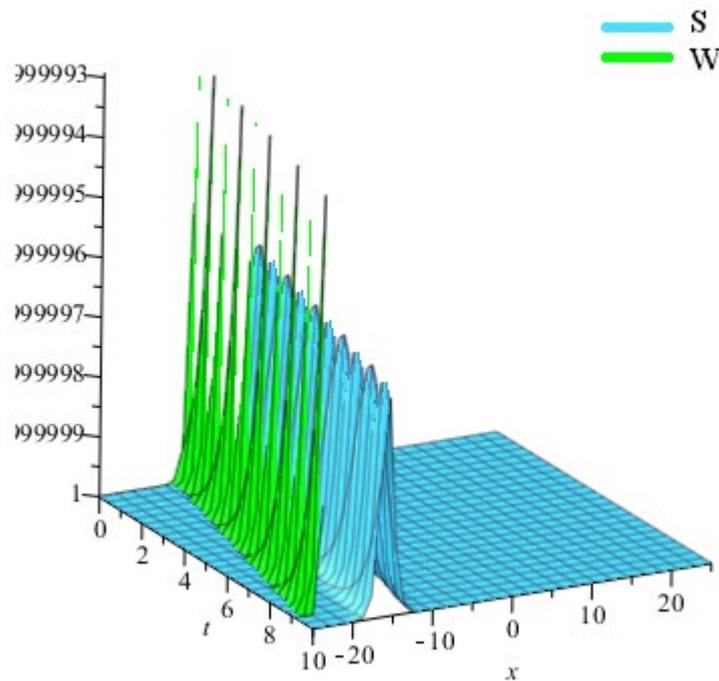


Рисунок 12 – Солитонное решение при  $a = 5$ ,  $k_1 = 25 - i$ ,  $l_1 = 15 - i$ ,  $m_1 = 1$

Самосогласованность динамики спиновой матрицы  $S$  и потенциала  $W$ , наблюдается на рисунках 10-12. Графики полученных решений построены в интервале времени от 0 до 10 и при значениях постоянных:  $k_1 = 25 - i$ ,  $l_1 = 15 - i$ ,  $m_1 = 1$ .

Метод Хироты позволяет получить одно-, двух-,  $n$ -солитонные решения, также по типу решений можно выделить экспоненциальное, приведенное выше и полиномиальное, полученное нами в работе [32], также некоторые другие аспекты были рассмотрены в [33-38].

### 2.3 Уравнение иерархии ферромагнетика Гейзенберга

В данном параграфе построим решение спиновой модели методом Хироты. Метод Хироты, являющийся одним из популярных методов теории солитонов, завоевал свое место наряду с МОЗР. Однако он намного компактнее МОЗР и позволяет находить различные виды решений нелинейных уравнений.

Существует ряд интегрируемых (2+1)-мерных обобщений уравнения (15). Одной из таких спиновых систем является уравнение [40]

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xy} + u \mathbf{S}_x, \quad (107)$$

$$u_x = -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y), \quad (108)$$

где  $\mathbf{S}(x, y, t)$  – вектор спина,  $u(x, y, t)$  – скалярная функция.

Уравнение (107)-(108) калибровочный и геометрический аналог НУШ

$$i\psi_t = \psi_{xy} + r^2 V\psi, \quad (109)$$

$$V_x = 2\partial_y(|\psi|^2), \quad (110)$$

где  $r^2 = +1$ .

Система уравнений (107)-(108) и ее различные обобщения и соответствующие задачи были изучены в работе [41].

В данном пункте рассматривается интегрируемая иерархия уравнения (107)-(108) в следующей форме [41].

$$S_t - S_{xxx} - \frac{3}{4} \text{tr}(S_x^2) S_x - \frac{3}{4} [\text{tr}(S_x^2)]_x S = 0. \quad (111)$$

Здесь  $S = \sum_{j=1}^3 S_j(x,t) \sigma_j$  матричный аналог спинового вектора  $\mathbf{S}$ , и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (112)$$

матрицы Паули. Компоненты матричной функции  $S$  удовлетворяют граничным условиям  $S(x,t)|_{x \rightarrow \pm\infty} = (0,0,\pm 1)$ .

УФГ интегрируемо МОЗР. Его пара Лакса может быть записана как

$$\Phi_x = -\frac{\lambda}{2} S\Phi, \quad (113)$$

$$\Phi_y = -\frac{\lambda^2}{2} S\Phi + \frac{\lambda}{2} SS_x\Phi, \quad (114)$$

$$\Phi_t = -\frac{\lambda^3}{2} S\Phi + \frac{\lambda^2}{2} SS_x\Phi - \frac{3\lambda}{8} \text{tr}(S_x^2) S\Phi - \frac{\lambda}{2} S_{xx}\Phi, \quad (115)$$

где  $\lambda$  – спектральный параметр,

$\Phi(x,t) = (\phi_1, \phi_2)^T$  – решения линейной системы (113)-(115).

Калибровочная эквивалентность уравнения (111) и трехкомпонентного связанного уравнения Кадомцева-Петвиашвили (УКП) [42-46]

$$q_t = \frac{1}{4} (q_{xxx} - 6qq_x + 3 \int q_{yy} dx + 6(pr)_x), \quad (116)$$

$$p_t = \frac{1}{2} (-p_{xxx} - 6qp_x + 3qp_x + 3p \int q_y dx - 3p_{xy}), \quad (117)$$

$$r_t = \frac{1}{2}(-r_{xxx} + 3qr_x - 3r \int q_y dx + 3r_{xy}), \quad (118)$$

была доказана в работе [45].

### 2.3.1 Билинеаризация иерархии уравнения УФГ

В данном разделе построим билинейную форму уравнения (111). Для нашего удобства перепишем уравнение в компонентах

$$S_t^+ - S_{xxx}^+ - \frac{3}{2}(S^+(S_x^+ S_x^- + S_{3x}^2))_x = 0, \quad (119)$$

$$S_t^- - S_{xxx}^- - \frac{3}{2}(S^-(S_x^+ S_x^- + S_{3x}^2))_x = 0, \quad (120)$$

$$S_{3t} - S_{3xxx} - \frac{3}{2}(S_3(S_x^+ S_x^- + S_{3x}^2))_x = 0. \quad (121)$$

Здесь  $S^\pm = S_1 \pm iS_2$ . рассмотрим стереографическую проекцию матричной функции  $S$  в следующем виде

$$S^+ = \frac{2\omega}{1+|\omega|^2}, \quad S^- = \frac{2\omega^*}{1+|\omega|^2}, \quad S_3 = \frac{1-|\omega|^2}{1+|\omega|^2}. \quad (122)$$

Отсюда получим

$$\omega = \frac{S^+}{1+S_3}. \quad (123)$$

После подстановки выражения (122) в систему уравнений (119)-(121) получим уравнение (111) в терминах стереографической проекции

$$\omega_t - \omega_{xxx} + \frac{6\omega^* \omega_x \omega_{xx}}{1+|\omega|^2} - \frac{6(\omega^*)^2 \omega_x^3}{(1+|\omega|^2)^2} = 0. \quad (124)$$

Согласно прямому методу Хироты, для получения билинейной формы уравнения (111), введем новые комплексные функции  $f$  и  $g$  в виде  $\omega = \frac{g}{f}$  в уравнении (124) (фактически,  $f = \phi_1^*$ ,  $g = \phi_2$ ), и получим следующую билинейную форму для уравнений (119)-(121):

$$[D_t - D_x^3](f^* \cdot g) = 0, \quad (125)$$

$$[D_t - D_x^3](f \cdot g^*) = 0, \quad (126)$$

$$[D_t - D_x^3](f^* \cdot f - g^* \cdot g) = 0, \quad (127)$$

$$[D_x](f^* \cdot f + g^* \cdot g) = 0, \quad (128)$$

$$D_x(f^* \cdot g^*)[D_x(f \cdot g)]^2 = 0, \quad (129)$$

где оператор Хироты представлен в виде

$$D_x^l D_t^n f(x, t) \cdot g(x, t) = (\partial_x - \partial_x^l)(\partial_t - \partial_t^n) f(x, t) \cdot g(x', t') \Big|_{x=x', t=t'}. \quad (130)$$

### 2.3.2 Солитонное решение

Используя полученную выше билинейную форму, теперь можем построить солитонное решение для спиновой системы. С этой целью, разложим функции  $g$  и  $f$  в формальные ряды по произвольной постоянной  $\varepsilon$ :

$$g(x, t) = \varepsilon g_1(x, t) + \varepsilon^3 g_3(x, t) + \dots, \quad (131)$$

$$f(x, t) = 1 + \varepsilon^2 f_2(x, t) + \varepsilon^4 f_4(x, t) + \dots. \quad (132)$$

Подставляя выражения (131)-(132) в билинейную форму (125)-(129), затем приравнивая коэффициенты при разных степенях  $\varepsilon$ , из (125) получим систему уравнений:

$$\varepsilon^1 : g_{1t} - g_{1xxx} = 0,$$

$$\varepsilon^3 : (\partial_x^3 - \partial_t)g_3 = (D_x^3 - D_t)(f_2^* \cdot g_1),$$

...

$$\varepsilon^{2n+1} : (\partial_x^3 - \partial_t)g_{2n+1} = \sum_{k+m=n} (D_x^3 - D_t)(f_{2k}^* \cdot g_{2m+1}).$$

Далее из (126) получим

$$\varepsilon^1 : g_{1t}^* - g_{1xxx}^* = 0,$$

$$\varepsilon^3 : (\partial_x^3 - \partial_t)g_3^* = (D_x^3 - D_t)(f_2 \cdot g_1^*),$$

$$\varepsilon^{2n+1} : (\partial_x^3 - \partial_t)g_{2n+1}^* = \sum_{k+m=n} (D_x^3 - D_t)(f_{2k} \cdot g_{2m+1}^*),$$

и из (127) следующие выражения

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 & : (\partial_x^3 - \partial_t)(f_2^* - f_2) = (D_x^3 - D_t)(g_1^* \cdot g_1), \\ \varepsilon^4 & : (\partial_x^3 - \partial_t)(f_4^* - f_4) = (D_x^3 - D_t)(g_1^* \cdot g_3 + g_3^* \cdot g_1 + f_2 \cdot f_2^*),\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}\varepsilon^{2n+1} & : (\partial_x^3 - \partial_t)(f_{2n}^* - f_{2n}) = (D_x^3 - D_t) \sum_{n_1+n_2=n-1} g_{2n_1+1}^* \cdot g_{2n_2+1} - \\ & - (D_x^3 - D_t) \sum_{m_1+m_2=n} f_{2m_1}^* \cdot f_{2m_2}.\end{aligned}$$

Аналогично из (128) получим

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 & : \partial_x(f_2^* - f_2) = -D_x(g_1^* \cdot g_1), \\ \varepsilon^4 & : \partial_x(f_4^* - f_4) = -D_x(g_1^* \cdot g_3 + g_3^* \cdot g_1 + f_2^* \cdot f_2),\end{aligned}$$

...

$$\varepsilon^{2n} : \partial_x(f_{2n}^* - f_{2n}) = -D_x \left[ \sum_{n_1+n_2=n-1} (g_{2n_1+1}^* \cdot g_{2n_2+1} + \sum_{n_1+n_2=n} f_{2n_1}^* \cdot f_{2n_2}) \right],$$

а из (129)

$$\begin{aligned}\varepsilon^3 & : g_{1x}^* g_{1x}^2 = 0, \\ \varepsilon^5 & : g_{1x}^2 g_{1x}^* f_2^* + 2g_{1x}^2 g_{1x}^* f_2 + 2g_{1x}^* g_{1x} g_{3x} + g_{1x}^2 g_{3x}^* - 2g_{1x}^* g_1 g_{1x} f_{2x} - g_1^* f_{2x} g_{1x}^2 = 0.\end{aligned}$$

Для получения односолитонного решения уравнения (111), выберем  $g = \varepsilon g_1$  и  $f = 1 + \varepsilon^2 f_2$ . Подставляя данные выражения в билинейную форму (125)-(129), из (125) получим

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 & : g_{1t} - g_{1xxx} = 0, \\ \varepsilon^3 & : f_{2t} g_1 - g_{1t} f_2^* - f_{2xxx} g_1 + 3f_{2xx}^* g_{1x} - 3f_{2x}^* g_{1xx} + f_2^* g_{1xxx} = 0,\end{aligned}$$

и из (126)

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 & : f_{2t}^* - f_{2t} - g_{1t}^* g_1 + g_1^* g_{1t} - f_{2xxx}^* + f_{2xxx} + g_{1xxx}^* g_1 - 3g_{1xx}^* g_{1x} + 3g_{1x}^* g_{1xx} - g_1^* g_{1xxx} = 0, \\ \varepsilon^4 & : f_{2t}^* f_2 - f_2^* f_{2t} - f_{2xxx}^* f_2 + 3f_{2xx}^* f_{2x} - 3f_{2x}^* f_{2xx} + f_2^* f_{2xxx} = 0.\end{aligned}$$

Уравнение (127) дает

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 & : f_{2x}^* - f_{2x} + g_{1x}^* g_1 - g_1^* g_{1x} = 0, \\ \varepsilon^4 & : f_{2t}^* f_2 - f_2^* f_{2t} = 0,\end{aligned}$$

а из (128) получим

$$\begin{aligned}\varepsilon^3 & : g_{1x}^* g_{1x}^2 = 0, \\ \varepsilon^5 & : g_{1x}^* g_{1x} g_{1f_{2x}} + g_{1f_{2x}}^* g_{1x}^2 = 0.\end{aligned}$$

Используя формулы (122) для компонентов матрицы  $S$ , получим

$$S^+ = \frac{2f^*g}{|f|^2 + |g|^2}, \quad S^- = \frac{2fg^*}{|f|^2 + |g|^2}, \quad S_3 = \frac{|f|^2 - |g|^2}{|f|^2 + |g|^2}. \quad (133)$$

Теперь мы готовы построить односолитонное решение для спиновой системы (111). Выберем  $g$  как  $g_1 = e^{i\theta}$  с  $\theta = kx + lt + m$ , где  $k$ ,  $l$  и  $m$  – комплексные постоянные. Решая уравнения найдем выражение для  $f_2$  в виде:

$$f_2 = \frac{iRe(k)}{2Im(k)} e^{-2Im(\theta)}, \quad (134)$$

где  $Re(k)$  и  $Im(k)$  действительная и мнимая части  $k$  соответственно. Наконец, мы можем написать односолитонное решение для спиновой системы (111)

$$S^+ = -\frac{2Im(k)(iRe(k)e^{iRe(\theta)-3Im(\theta)} - Im(k)e^{i(Re(\theta)+iIm(\theta))})}{(Im(k))^2(1+e^{-2Im(\theta)}) + (Re(k))^2e^{-4Im(\theta)}}, \quad (135)$$

$$S^- = \frac{2Im(k)(iRe(k)e^{-iRe(\theta)-3Im(\theta)} + Im(k)e^{i(-Re(\theta)+iIm(\theta))})}{(Im(k))^2(1+e^{-2Im(\theta)}) + (Re(k))^2e^{-4Im(\theta)}}, \quad (136)$$

$$S_3 = \frac{(Im(k))^2(1-e^{-2Im(\theta)}) + (Re(k))^2e^{-4Im(\theta)}}{(Im(k))^2(1+e^{-2Im(\theta)}) + (Re(k))^2e^{-4Im(\theta)}}. \quad (137)$$

Визуализация полученных решений (135)-(137) представлена на рисунках 13, 14, 15, 16, 17, 18. Графики для  $S_1$  (рисунки 13, 14) и  $S_2$  (рисунки 15, 16) построены со значениями параметров  $t = 0, m = k = l = 1$ . Здесь параметры  $k, l$  и  $m$  – это высота, скорость и длина волны солитона. На рисунках 17, 18 (решение для  $S_3$ ), зависящее от значений  $m$ , здесь  $t = 0, k = l = 1$ , солитон относится к типу темных солитонов. Темный солитон – это так называемое уменьшение интенсивности непрерывной волны. Как видно из графиков, солитоны достигают экстремумов на верхней и нижней границах в соответствии с граничным условием  $S(x, t)|_{x \rightarrow \pm\infty} = (0, 0, \pm 1)$ .

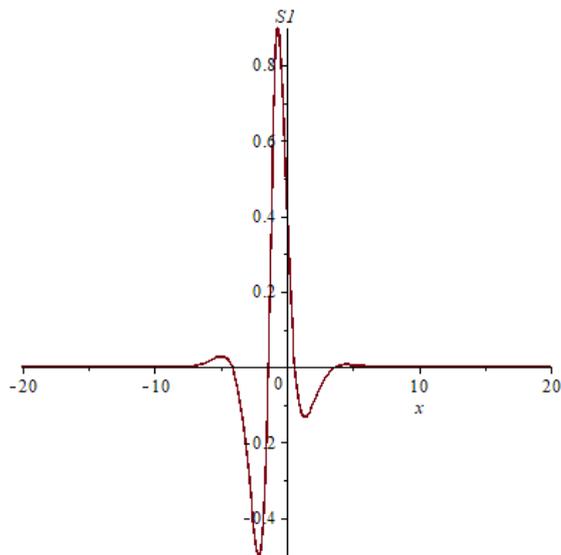


Рисунок 13 – Решение для  $S_1$  при  $t = 0$

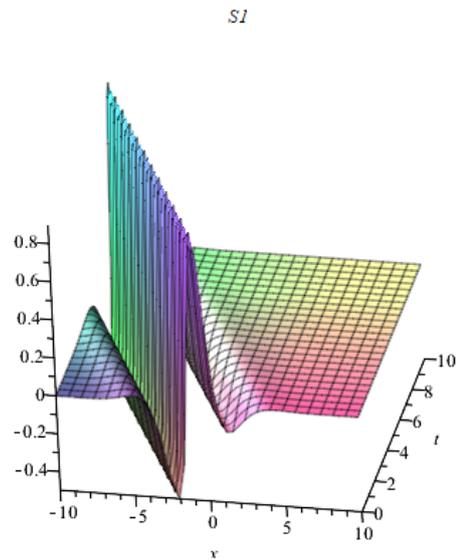


Рисунок 14 – Решение для  $S_1$

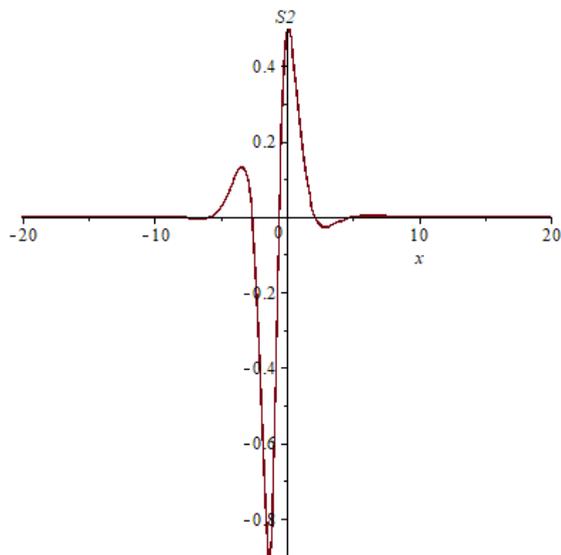


Рисунок 15 – Решение для  $S_2$ ,  
при  $t = 0, m = 1$

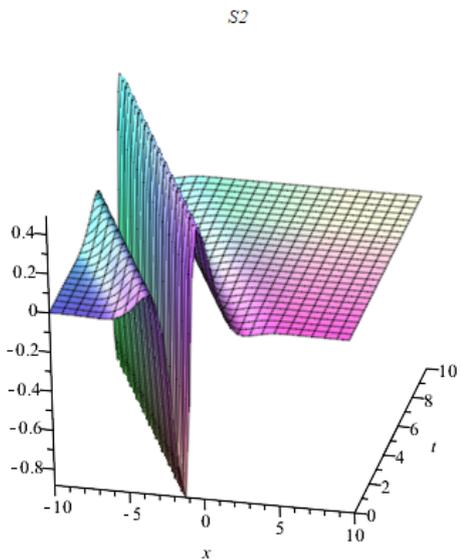


Рисунок 16 – Решение для  $S_2$ ,  
при  $m = 1$

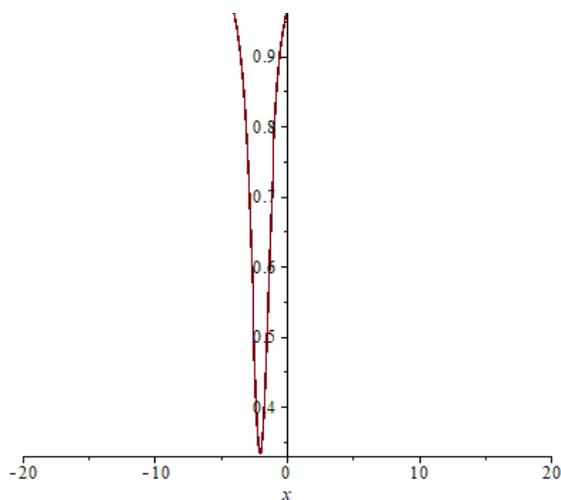


Рисунок 17 – Решение для  $S_3$ ,  
при  $t = 0, m = 2$

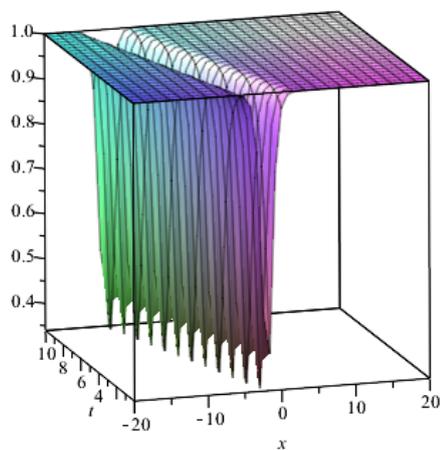


Рисунок 18 – Решение для  $S_3$ , при  
 $m = 2$

Иерархия для УФГ получена в виде (111) в работе [40, р. 012132-8], там же была сформулирована и доказана теорема об эквивалентности этой иерархии и связанного УКП (117)-(119). В Таким образом, здесь построена билинейная форма для иерархии УФГ и прямым методом Хироты найдено односолитонное решение этого уравнения. Построены соответствующие графики. Далее рекуррентным образом можно построить двух-, трех-, и n-солитонные решения.

## **2.4 Уравнение Богоявленского—Конопельченко с переменными коэффициентами**

Понимание фундаментальных механизмов различных физических моделей требует исследования точных решений нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ). НЭУ применяются во многих научных областях, таких как намагниченная плазма [47], многокомпонентная плазма [48] и т. д.

В данном пункте кратко обозначим наши результаты, опубликованные в работе [49]. В статье предлагается форма расширенного обобщенного метода  $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ -разложения с переменным коэффициентом. Преимущество расширенного обобщенного метода  $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ -разложения состоит в том, что его можно использовать для решения НЭУ как с постоянными, так и с переменными коэффициентами, тогда как базовый метод  $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$  можно использовать только с постоянными коэффициентами.

Предложенная методика была предложена для решения уравнения Богоявленского-Конопельченко (УБК) с переменными коэффициентами, которое описывает взаимодействие волны Римана, распространяющейся вдоль оси  $y$ , и длинной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , в жидкости. Далее УБК с переменными коэффициентами применяется для стратифицированных внутренних волн, волн мелкой воды, ионно-звуковых волн и распространения воды в жидкости.

Решения УБК с переменными коэффициентами графически изображаются в виде трехмерных графиков поверхности и связанных с ними контурных графиков со случайными свободными параметрами. Полученные решения имеют волны типа кинка для УБК. На рисунках 19-20 представлены графики решений УБК.

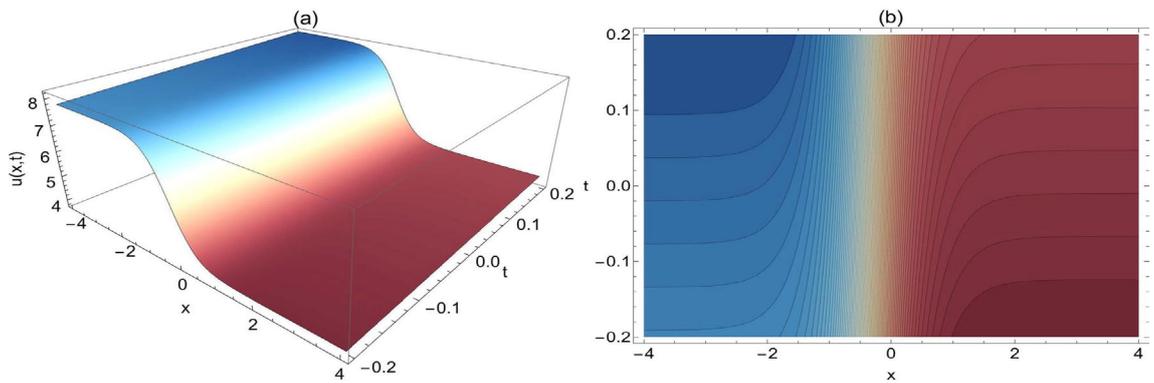


Рисунок 19 – Решение УБК, при значениях параметров

$$P_1 = 1, P_2 = 0, P_3 = 2, C = 0, D = 1, s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 1, a(t) = t, q(t) = t, r(t) = t, n(t) = t, y = -2, k = -3$$

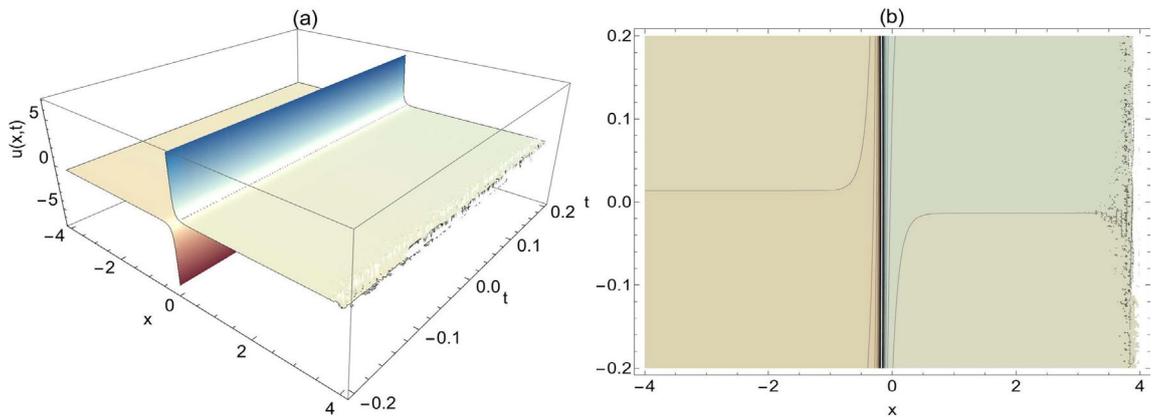


Рисунок 20 – Решение УБК, при значениях параметров

$$P_1 = -1, P_2 = 0, P_3 = 2, C = 4, D = 1, s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 1, a(t) = t, q(t) = t, r(t) = t, n(t) = t, y = -2, k = -3, -4 \leq x \leq 4, -0.2 \leq t \leq 0.2$$

Решения уравнения БК с переменными коэффициентами графически изображаются в виде трехмерных графиков поверхности и связанных с ними контурных графиков со случайными свободными параметрами. Полученные решения имеют волны типа кинка для УБК в гиперболической, тригонометрической и рациональной форме динамически представляются как аннигиляция трехмерных кинковых волн, многосолитонных волн, одиночных солитонов и т. д. Кроме того, полученные решения рассматриваемого уравнения, которые содержат произвольные функциональные параметры и другие постоянные параметры, могут быть использованы для изучения поведения физических систем.

### Выводы по разделу

Спиновые системы, которые включают потенциалы, принадлежат к обширному классу интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений с дополнительными полями. В разделе было продемонстрировано, что рассматриваемые уравнения обладают представлениями Лакса, что свидетельствует о их интегрируемости. ОУЛЛ является солитонным уравнением

и описывает нелинейные процессы намагниченности в одно- и двухслойных ферромагнетиках. Важным результатом этого исследования было получение билинейной формы и решений для спиновой системы с самосогласованным потенциалом. Теоретически доказано появление солитонов в одномерных магнетиках, на примере обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом. Реализованы подходы получения решений спиновых моделей методом Хироты для локальных случаев на примере обобщенного уравнения Гейзенберга. Также рассмотрены различные волновые процессы, описываемые УБК с переменными коэффициентами. Результаты данного раздела опубликованы в работах [23-24, 32-38, 41].

### 3 НЕЛОКАЛЬНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ

В квантовой механике нелокальность означает, что взаимодействие между квантовыми объектами может происходить без пространственного разделения и без прямого обмена частицами или сигналами в пространстве. Это связано с особенностями квантовой суперпозиции и квантовой запутанности.

В классической физике информация передается между объектами с помощью локальных взаимодействий, которые ограничены скоростью света и требуют обмена сигналами. В квантовой механике, однако, взаимодействие между квантовыми объектами может быть нелокальным, то есть оно может протекать мгновенно или сразу на большие расстояния.

Это свойство нелокальности квантовой механики было экспериментально подтверждено в ряде физических экспериментов, таких как эксперименты Белла. В этих экспериментах наблюдается корреляция между запутанными квантовыми состояниями, которая не может быть объяснена классическими локальными моделями [50-52].

Нелокальность в квантовой механике вызывает некоторые концептуальные вопросы, такие как принцип локальности и возможные парадоксы связанные с быстрой передачей информации на большие расстояния. Это также имеет практическое значение для квантовых вычислений и квантовых коммуникационных протоколов, которые могут использовать запутанные состояния для решения определенных задач более эффективно, чем классические системы [53-56].

В квантовой механике существует несколько видов нелокальности, которые отличаются своими особенностями и проявлениями:

*Нелокальность в запутанности:* Запутанность представляет собой особое состояние, когда два или более квантовых объекта становятся сильно коррелированными и не могут быть описаны независимыми состояниями. Если два запутанных объекта пространственно разделены, изменение состояния одного объекта мгновенно влияет на состояние другого объекта, независимо от расстояния между ними.

*Нелокальность в принципе неопределенности:* Принцип неопределенности Гейзенберга устанавливает, что нельзя точно определить одновременно и положение и импульс квантовой частицы. Когда измеряется значение одной величины, состояние частицы мгновенно становится определенным, но при этом другие связанные величины могут изменяться. Это означает, что мгновенно измеряя одну величину на одной стороне, это может влиять на связанную величину на другой стороне [52, с. 29; 53].

*Нелокальность в квантовых вычислениях:* Квантовые вычисления могут использовать принцип суперпозиции и запутанности для решения задач эффективнее, чем классические вычисления. Например, алгоритм Шора для факторизации больших чисел использует принципы запутанности, чтобы выполнить вычисления, которые классические компьютеры выполняли бы намного дольше. Это связано с нелокальностью в вычислительных

возможностях квантовых систем.

*Нелокальность в квантовых корреляциях:* В квантовой механике наблюдаются квантовые корреляции между квантовыми объектами, которые не могут быть объяснены классическими моделями. Это проявляется в экспериментах Белла и других экспериментах, где измерения на одной стороне системы мгновенно влияют на результаты измерений на другой стороне, независимо от расстояния между ними.

Одним из примеров нелокальных интегрируемых нелинейных уравнений является НУШ, описывающее распространение нелинейных волн в различных физических системах. НУШ объединяет линейные и нелинейные эффекты, при этом нелинейный член учитывает самовзаимодействие и самомодуляцию фазы волны [54-57].

НУШ считается интегрируемым, поскольку имеет бесконечное число сохраняющихся величин и солитонные решения. Нелокальность для НУШ понимается так, что поведение волновой функции в определенной точке зависит не только от ее локального окружения, но и от более удаленных точек. В результате НУШ проявляет дальнедействующие корреляции и нелокальные эффекты.

НУШ нашло широкое применение в различных областях, включая оптику, физику конденсированного состояния и нелинейную науку. НУШ было использовано для описания явлений, таких как оптические солитоны, конденсаты Бозе-Эйнштейна и оптические связи по оптоволокну.

Следует отметить, что существуют и другие нелокальные интегрируемые нелинейные уравнения, такие как уравнение Кортевега – де Вриза, уравнение Хироты, уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха и др.

*PT*-симметрия, или симметрия пространственной инверсии-временной инверсии, является концепцией в физике, исходящей из квантовой механики. Она относится к определенному типу симметрии, объединяющему симметрию пространственной инверсии (*P*) и симметрию временной инверсии (*T*).

В классической физике симметрия пространственной инверсии относится к симметрии относительно пространственного отражения, что означает, что законы физики остаются неизменными, если все пространственные координаты инвертируются ( $x, -x$ ). Симметрия временной инверсии, в свою очередь, относится к симметрии относительно обращения направления времени.

В квантовой механике концепция *PT*-симметрии расширяет понятие симметрии на комплексные системы, особенно в контексте неэрмитовых гамильтонианов. Гамильтониан считается *PT*-симметричным, если он остается неизменным при совмещенном действии операций пространственной инверсии (*P*) и временной инверсии (*T*). Математически это может быть представлено как  $H = PT$ , где *H* - оператор гамильтониана, *P* - оператор пространственной инверсии и *T* - оператор временной инверсии.

*PT*-симметрия была широко изучена в области квантовой механики и привела к интересным наблюдениям и явлениям. Одним из ключевых аспектов *PT*-симметричных систем является возможность иметь полностью

вещественный спектр, даже если сам гамильтониан является неэрмитовым. Это означает, что уровни энергии системы могут быть вещественными, что позволяет существование устойчивых и физически значимых решений [58-60].

*PT*-симметричные системы исследуются в различных областях физики, включая оптику, физику конденсированного состояния и квантовую теорию поля. Например, в оптике *PT*-симметричные системы могут проявлять необычные свойства распространения света [7-8].

*PT*-симметрия (симметрия пространственной инверсии-временной инверсии) в основном является концепцией, возникающей в контексте неэрмитовых квантовых систем. В то время как *PT*-симметрия была широко исследована в различных областях физики, включая оптику и квантовую механику, ее прямое применение к ферромагнитным материалам не так распространено.

Ферромагнитные материалы обычно описываются эрмитовыми гамильтонианами, которые симметричны относительно операций временной инверсии и пространственной инверсии. В этом смысле, обычная концепция *PT*-симметрии не применима к ферромагнетикам. Однако стоит отметить, что определенные аспекты неэрмитовой физики и концепции *PT*-симметрии нашли применение в изучении магноников и спинтроники, которые связаны с манипуляцией и контролем спиновых волн и спиновых токов в магнитных материалах. В контексте магноников, эффекты, аналогичные *PT*-симметрии, исследуются путем рассмотрения неэрмитовых расширений магнонных гамильтонианов. Такие расширения могут включать дополнительные члены, которые нарушают обычную эрмитовость гамильтониана и приводят к распространению спиновых волн или усиленному транспорту магнонов.

Хотя *PT*-симметрия не является фундаментальной симметрией в контексте ферромагнитных материалов, концепции, вдохновленные системами с *PT*-симметрией, такие как неэрмитовы расширения и изучение спинового динамического поведения, могут предоставить понимание поведения и манипуляции спиновыми волнами в ферромагнитных материалах [9].

Стоит отметить, что область *PT*-симметрии в ферромагнитных материалах все еще является относительно новой и развивающейся областью исследований, и в настоящее время могут вестись исследования, исследующие возможные связи между концепциями *PT*-симметрии и некоторыми аспектами ферромагнитных систем. Это может включать изучение неэрмитовых эффектов, неравновесной динамики спиновых систем, а также взаимодействия между ферромагнитными материалами и другими системами, обладающими *PT*-симметрией.

В целом, исследования *PT*-симметрии в ферромагнетиках являются активной и интересной областью, и будущие исследования могут привести к новым открытиям и приложениям в физике магнетизма и спинтроники.

### 3.1 Уравнение Яджимы-Ойкавы

Большое количество физически важных уравнений возникают как потоки иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура (АКНС) [10, р. 685]. Оператор Лакса иерархии АКНС является  $sl(2)$ -значным, линейным по спектральному параметру, обобщающим оператор Лакса иерархии Захарова-Шабата [17, р. 1019]. Первым и наиболее известным примером является, конечно же, НУШ, которое связано с положительным потоком. Калибровочно-эквивалентные иерархии включают иерархию уравнений Гейзенберга [61-72]. Иерархия АКНС допускает матричные обобщения, обобщения простых алгебр Ли и симметрические пространства [73].

Интегрируемые уравнения, а в частности солитонные относятся к важному классу нелинейных дифференциальных уравнений в математике и физике. Как описано в прошлом разделе, решения для таких уравнений можно получить различными методами [74-82]. Точные решения таких интегрируемых систем и могут быть получены с помощью обратного преобразования рассеяния и метода Хироты. Поиск интегрируемых НДУ – чрезвычайно важная задача современной математической физики и ее приложений. Другой важной проблемой является построение точных решений таких интегрируемых НДУ. В настоящее время для нахождения точных решений интегрируемых нелинейных уравнений существует несколько мощных математических инструментов, таких как обратное преобразование рассеяния, билинейный метод Хироты, метод Вронскиана и пфаффиана, полиномиальный подход Белла, преобразования Дарбу и Бэклунда, анализ Пенлеве и др. Среди этих методов построения точных решений билинейный метод Хироты наиболее эффективен для построения точных решений и многократных взаимодействий солитонов, а также описания их динамики. Отметим, что солитонные решения имеют широкий спектр приложений в нелинейной физике и других областях наук. Например, нелинейные решения возникают в различных областях, таких как гидромеханика, нелинейная оптика, атомная физика, биофизика, биология, теория поля, в физике плазмы и конденсатов Бозе-Эйнштейна и т.д.

Рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение, возникающее как уравнение Яджимы-Ойкавы

$$\begin{aligned} iq_t + q_{xt} - vq &= 0, \\ v_x - 2\varepsilon(|q|^2)_t &= 0, \end{aligned} \quad (138)$$

где  $q(x,t)$  комплексная функция;

$\bar{q}$  - комплексное сопряжение  $q$ ,  $v(x,t)$  потенциал,  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $x$  и  $t$  независимые переменные. Для рассматриваемого уравнения, определим калибровочный и геометрический эквивалент [61]:

$$S_t - S \wedge S_{xt} - uS_x = 0, \quad (139)$$

$$u_x + \frac{1}{2}(\mathbf{S}_x^2)_t = 0, \quad (140)$$

где  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$  единичный спиновый вектор,  $\mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ ,  $\mathbf{S}_x^2 = S_{1x}^2 + S_{2x}^2 + S_{3x}^2$  и  $u$  скалярный потенциал. Данное уравнение относится к интегрируемым спиновым системам, описывающим динамику намагниченности в ферромагнитных материалах.

Уравнение (139)-(140) описывает динамику спиновой системы в различных физических системах, таких как ферромагнетики, антиферромагнетики и другие магнитные материалы. Оно может иметь важное значение в области спинтроники и магнитоэлектроники, где изучается управление и манипуляция спиновыми состояниями для создания новых устройств и технологий. Уравнение (139)-(140) описывает динамику магнитного момента в спиновой системе. Однако, в определенных контекстах, в теории спинтроники, может использоваться понятие потока спина. В контексте спинтроники и спиновых токов, обычно используется понятие спинового тока как потока спиновых моментов в материале или устройстве. В работе [24] найдено решение типа разрушительных волн уравнения (139)-(140).

### 3.2 Представление Лакса

Представим две формы уравнения Яджимы-Ойкавы: А и Б типа

$$\begin{aligned} iq_t - q_{xt} - vq &= 0, \\ ir_t + r_{xt} + vr &= 0, \\ v_x + 2d^2(rq)_t &= 0. \end{aligned} \quad (141)$$

Оно также интегрируемо МОЗР и допускает представление Лакса в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U_2 \Phi, \\ \Phi_t &= V_2 \Phi, \end{aligned} \quad (142)$$

с матричными операторами

$$\begin{aligned} U_2 &= id\lambda\sigma_3 + dQ, \\ V_2 &= \frac{1}{1-2d\lambda} B. \end{aligned} \quad (143)$$

Здесь

$$B = -0.5iv\sigma_3 - di\sigma_3 Q_t \quad (144)$$

и

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (145)$$

Условие совместности

$$U_{2t} - V_{2x} + [U_2, V_2] = 0, \quad (146)$$

что является эквивалентными уравнению спиновой системы.

Уравнение Яджимы-Ойкавы Б-типа

Также приведем вторую форму уравнения:

$$\begin{aligned} iq_x + q_{xt} - vq &= 0, \\ ir_x - r_{xt} + vr &= 0, \\ v_t - 2(rq)_x &= 0. \end{aligned} \quad (147)$$

Уравнение (147) также интегрируемо в рамках МОЗР и допускает пару Лакса

$$\begin{aligned} \Phi_t &= U_3 \Phi, \\ \Phi_x &= V_3 \Phi, \end{aligned} \quad (148)$$

где

$$U_3 = -i\lambda\sigma_3 + Q, \quad V_3 = \frac{1}{1-2\lambda} B, \quad B = -0.5iv\sigma_3 - i\sigma_3 Q_x. \quad (149)$$

### 3.3 Солитонное решение

Найдем решение уравнения (147) типа бегущей волны. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} iq_t - q_{xt} - vq &= 0, \\ v_x - 2\varepsilon(|q|^2)_t &= 0. \end{aligned} \quad (150)$$

Предположим  $q(x, t)$  имеет вид

$$q = \chi(x, t) e^{i(ax+bt+\delta)}, \quad (151)$$

где  $\chi(x, t)$  действительная функция  $a, b, \delta$  некоторые действительные постоянные. Тогда перепишем уравнение (150) как

$$\begin{aligned} i(\chi_t + ib\chi) - [\chi_{xt} + ia\chi_t + ib\chi_x - ab\chi] - v\chi &= 0, \\ v_x - 2\varepsilon(\chi^2)_t &= 0. \end{aligned} \quad (152)$$

Далее получим

$$\begin{aligned}
\chi_t - a\chi_t - b\chi_x &= 0, \\
-b\chi - \chi_{xt} + ab\chi - v\chi &= 0, \\
v_x - 2\varepsilon(\chi^2)_t &= 0,
\end{aligned} \tag{153}$$

или

$$\begin{aligned}
\chi_t - a\chi_t - b\chi_x &= 0, \\
\chi_{xt} - b(a-1)\chi + v\chi &= 0, \\
v_x - 2\varepsilon(\chi^2)_t &= 0.
\end{aligned} \tag{154}$$

Введем новую независимую переменную  $\xi = mx + ct$ , где  $m, c$  действительные постоянные. Тогда получим

$$\begin{aligned}
(c - ac - bm)\chi_\xi &= 0, \\
cm\chi_{\xi\xi} - [b(a-1) - c_1]\chi + 2cm^{-1}\chi^3 &= 0, \\
mv - 2c\chi^2 - mc_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{155}$$

Далее определим

$$\begin{aligned}
m &= \frac{c(1-a)}{b}, \\
\chi_{\xi\xi} &= \frac{b(a-1) - n}{cm}\chi - 2m^{-2}\chi^3, \\
v &= 2m^{-1}c\chi^2 + c_1.
\end{aligned} \tag{156}$$

При выполнении условий

$$\begin{aligned}
\chi_{\xi\xi} + (1 - 2k^2)\chi + 2k^2\chi^3 &= 0, \\
\chi_{\xi\xi} - (2 - k^2)\chi + 2\chi^3 &= 0,
\end{aligned} \tag{157}$$

Решение для уравнения (150) дается как

$$\begin{aligned}
q_1 &= cn(\xi | k)e^{i(ax+bt+\delta)}, \\
v_1 &= 2cd^{-1}cn^2(\xi | k) + c_1,
\end{aligned} \tag{158}$$

и

$$\begin{aligned}
q_2 &= dn(\xi | k)e^{i(ax+bt+\delta)}, \\
v_2 &= 2cm^{-1}dn^2(\xi, k) + c_1.
\end{aligned} \tag{159}$$

При  $k = 1$ , получим односолитонное решение уравнения в виде [96]

$$q = \frac{\alpha}{\cosh \xi} e^{i(ax+bt+\delta)}$$

$$v = \frac{2c\varepsilon}{m \cosh^2 \xi} + c_1, \quad (160)$$

где

$$\alpha = \pm \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad c_1 = -cm^{-1}[(a-1)^2 + m^2], \quad b = cm^{-1}(1-a). \quad (161)$$

На рисунках 21-22 представлена графическая визуализация решения (160) при значениях параметров  $a = 20, b = 0.5, c = 3, m = 4, \varepsilon = 0.2, \delta = 1$ .

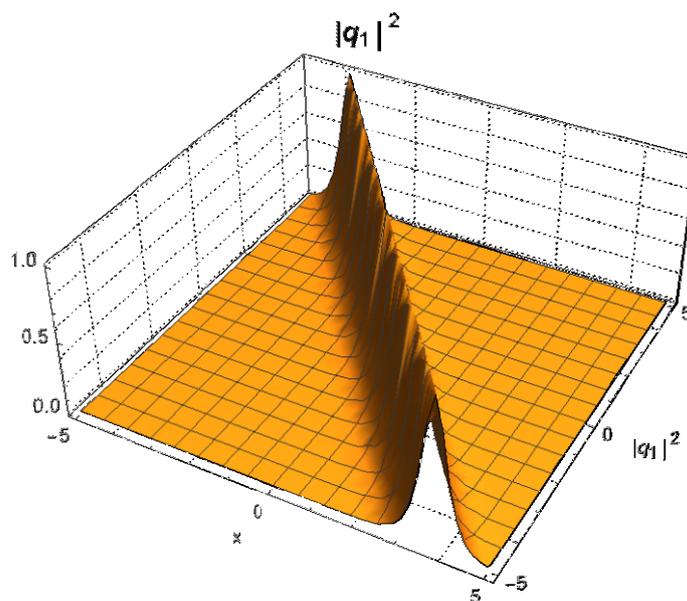


Рисунок 21 – Решение для  $q$  при  $a = 0.2, c = 3, m = 4, \varepsilon = 0.2, \delta = 1, k=1$ .

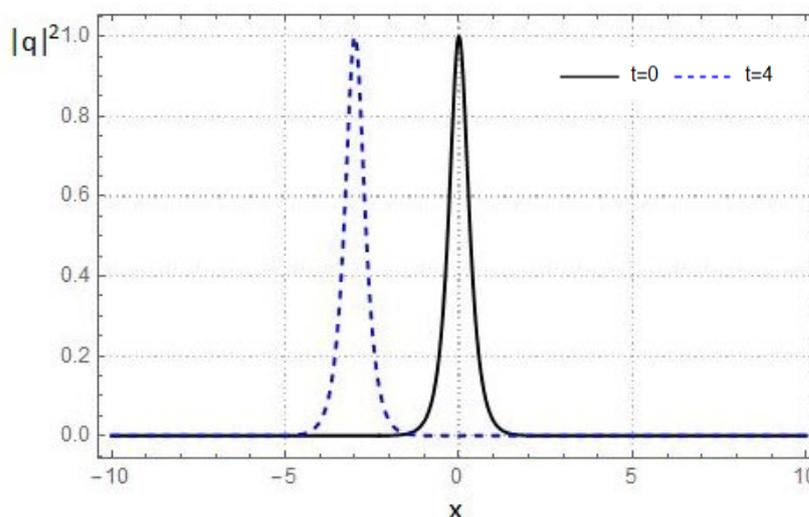


Рисунок 22 – Решение для  $q$  при  $a = 0.2, c = 3, m = 4, \varepsilon = 0.2, \delta = 1, k=1, t_1=0, t_2=4$ .

### 3.4 Билинейная форма уравнения

Для построения билинейной формы уравнения (139)-(140) воспользуемся следующим преобразованием

$$q = h\phi, \quad v = 2(\ln \phi)_{xt}, \quad (162)$$

где  $h$  – комплексная функция,  $\phi$  – действительная функция. Получим следующую билинейную форму

$$\begin{aligned} [iD_t + D_x D_t](h \circ \phi) &= 0, \\ D_x^2(\phi \circ \phi) - 2\varepsilon \bar{h} h &= 0, \end{aligned} \quad (163)$$

Оператор Хироты  $D$  определяется как

$$D_x^n f(x) \circ g(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n f(x) g(x') \Big|_{x=x'}. \quad (164)$$

Для получения односолитонного решения разложим функции  $h$  и  $\phi$  как

$$h = e^\chi, \quad \phi = 1 + \phi_2 = 1 + \frac{e^{(\chi + \bar{\chi})}}{2b}, \quad (165)$$

где  $\chi = i(ax + bt + \delta)$ , ( $a = \text{const}, b = \text{const}, \delta = \text{const}$ ). Подставив разложения (165) в билинейную форму (163) получим односолитонное решение уравнения.

### 3.5 Солитонное решение спиновой системы

Рассмотрим представление Лакса уравнения (139)-(140)

$$\begin{aligned} \Phi_{0,x} &= id\lambda \sigma_3 \Phi_0, \\ \Phi_{0,t} &= -\frac{ic}{1-2d\lambda} \sigma_3 \Phi_0, \end{aligned} \quad (166)$$

где

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_{01} & -\bar{\phi}_{02} \\ \phi_{02} & \bar{\phi}_{01} \end{pmatrix}, \quad \Phi_0^{-1} = \frac{1}{\det \Phi_0} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{01} & \bar{\phi}_{02} \\ -\phi_{02} & \phi_{01} \end{pmatrix}, \quad \det \Phi_0 = |\phi_{01}|^2 + |\phi_{02}|^2. \quad (167)$$

Решение линейной системы уравнений (166) будет

$$\phi_{01} = c_1 e^{-\chi}, \quad \phi_{02} = c_2 e^{\chi + i\delta_{21}}, \quad (168)$$

где  $c_j$  комплексные постоянные,  $\chi = \chi_1 + i\chi_2 = i(d\lambda - \frac{c}{1-2d\lambda}t + \delta_1)$ ,

$\delta_{21} = \delta_2 - \delta_1$ ,  $\lambda = \alpha + i\beta$  и  $\delta_j, \alpha, \beta$  действительные постоянные. Тогда для спиновой матрицы  $S$  получим

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix} = \Phi_0^{-1} \sigma_3 \Phi_0 = \begin{pmatrix} |\phi_{01}|^2 - |\phi_{02}|^2 & -2\bar{\phi}_{01}\bar{\phi}_{02} \\ -2\phi_{01}\phi_{02} & |\phi_{02}|^2 - |\phi_{01}|^2 \end{pmatrix}. \quad (169)$$

И соответственно для компонентов  $S$

$$S_3 = \frac{|\phi_{01}|^2 - |\phi_{02}|^2}{\det \Phi_0}, \quad S^+ = -\frac{2\phi_{01}\phi_{02}}{\det \Phi_0}. \quad (170)$$

Подставляя  $\phi_{0j}$  в (170), получим односолитонное решение уравнения (139)-(140) в виде

$$S_3 = \frac{|c_1|^2 e^{-2\chi_1} - |c_2|^2 e^{2\chi_1}}{|c_1|^2 e^{-2\chi_1} + |c_2|^2 e^{2\chi_1}}, \quad S^+ = -\frac{2c_1c_2 e^{i\delta_{21}}}{|c_1|^2 e^{-2\chi_1} + |c_2|^2 e^{2\chi_1}}. \quad (171)$$

или

$$S_3 = -\tanh(2\chi_1) = 1 - \frac{e^{2\chi_1}}{|c_1| \cosh(2\chi_1)}, \quad S^+ = -\frac{e^{i(\delta_{21} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}{\cosh(2\chi_1)}, \quad S^- = \bar{S}^+, \quad (172)$$

где  $c_j = |c_j| e^{i\varepsilon_j}$ .

### Бездисперсионный предел спиновой системы

Для получения бездисперсионного предела используем преобразование  $q(x, t)$ :

$$q = \sqrt{f} e^{\frac{is}{\varepsilon}}, \quad (173)$$

где  $f, s$  некоторые функции,  $\varepsilon$  действительный параметр. Подставляя (173) в уравнение (139)-(140) получим

$$\begin{aligned} s_t - s_x s_t + v &= 0, \\ f_t - s_t f_x - s_x f_t &= 0, \\ v_x - 2\delta f_t &= 0. \end{aligned} \quad (174)$$

Система уравнений (174) является бездисперсионным пределом уравнения (139)-(140).

### 3.6 Нелокальные уравнения для спиновых систем

#### 3.6.1 Спиновый эквивалент уравнения Яджимы-Ойкавы

Нелокальная форма уравнения (138) представлена в следующем виде

$$\begin{aligned} iq_t - q_{xt} - vq &= 0, \\ ir_t + r_{xx} + vr &= 0, \\ v_x - 2\varepsilon(rq)_t &= 0, \end{aligned} \quad (175)$$

где

$$r = k\bar{q}(\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 t), \quad r = kq(\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 t), \quad k = \pm 1, \quad \varepsilon_j^2 = 1 \quad (176)$$

или

$$\begin{aligned} r &= k\bar{q}(-x, t), \quad r = k\bar{q}(x, -t), \quad r = k\bar{q}(-x, -t), \\ r &= kq(-x, t), \quad r = kq(x, -t), \quad r = kq(-x, -t). \end{aligned} \quad (177)$$

Но здесь надо отметить, что в отличие от локального случая, в нелокальном случае в уравнениях Серре — Френе кривизны  $\kappa(t, x)$  и  $\sigma(t, x)$  кручение  $\tau(t, x)$ ,  $\omega_j(t, x)$  являются комплекснозначными функциями. В результате в нелокальном случае спиновая матрица  $S$  не является эрмитовой и обладает  $PT$ -симметрией  $S(t, x) = \sigma_3 S^+(t, -x) \sigma_3$ . Соответствующий вектор спина  $S(t, x) = (S_1(t, x), S_2(t, x), S_3(t, x))$  является комплексным вектором. Как мы упоминали выше, в нелокальном случае спиновая матрица  $S(t, x)$  не является эрмитовой. Но можно разложить ее как сумму эрмитовой матрицы и антиэрмитовой матрицы

$$S = M + iL, \quad (178)$$

где

$$M = \frac{1}{2}(S^+ + S), \quad L = \frac{i}{2}(S^+ - S). \quad (179)$$

Далее используя стандартные матричные представления Паули для этих матриц:  $M = m \cdot \sigma$ ,  $L = l \cdot \sigma$ , где  $m$  и  $l$  действительные. Из условий  $S = m + il$  и  $S^2 = 1$  получим

$$m^2 - l^2 = 1, \quad m \cdot l = 0. \quad (180)$$

И тогда для нелокального случая уравнение (139)-(140) запишется как

$$\begin{aligned}
m_t - m \wedge m_{xt} + l \wedge l_{tx} - (u_1 m_x - u_2 l_x) &= 0, \\
l_t - m \wedge l_{xt} - l \wedge m_{xt} - (u_1 l_x + u_2 m_x) &= 0, \\
u_{1x} - \frac{1}{2}(m_x^2 - l_x^2) &= 0, \\
u_{2x} - m_x \cdot l_x &= 0,
\end{aligned} \tag{181}$$

где  $u_j$  реальные функции,  $u = u_1 + iu_2$ . Пара Лакса для данного уравнения дается как

$$\begin{aligned}
\Psi_x &= U_4 \Psi, \\
\Psi_t &= V_4 \Psi.
\end{aligned} \tag{182}$$

Здесь

$$U_4 = -i\lambda(M + iL), \quad V_4 = \frac{2\lambda}{1 - 2\lambda} Z, \tag{183}$$

где

$$Z = 0.25([M, M_t] - [L, L_t]) + i([M, L_t] + [L_t, M]) + 2iu(M + iL). \tag{184}$$

### 3.7.2 Нелокальное обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом

Аналогично предыдущему пункту, путем разложения спиновой матрицы на две составляющие определим нелокальный эквивалент ОУЛЛ с СВП. И таким образом получим уравнение для нелокального случая в следующем виде

$$l_t - \frac{1}{2}[m, m_{xx}] + \frac{1}{2}[l, l_{xx}] + \frac{1}{a}[m, u] + \frac{1}{a}[l, u] = 0, \tag{185}$$

$$m_t + \frac{1}{2}[m, l_{xx}] + \frac{1}{2}[l, m_{xx}] + \frac{1}{a}[m, v] + \frac{1}{a}[l, v] = 0, \tag{186}$$

где  $u + iv = W$ .

Далее представим представление Лакса для данного уравнения

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{187}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{188}$$

где матричные операторы  $U$  и  $V$  задаются как

$$U = -i\lambda(M + iL), \tag{189}$$

$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \left( \frac{i}{\lambda + a} - \frac{i}{a} \right) (u + iv). \tag{190}$$

Здесь  $V_2 = -2i(M + iL)$ ,  $V_1 = (M + iL)(M + iL)_x$ . Наличие представления Лакса (187)-(188) подтверждает интегрируемость нелокального ОУЛЛ с СВП в рамках теории солитонов.

Исследования в этой области могут иметь важное значение для развития новых методов управления и контроля свойств ферромагнитных материалов, а также для создания новых устройств и технологий на основе этих материалов. Они также могут помочь расширить наше понимание фундаментальных взаимодействий в ферромагнитных системах и способствовать развитию новых теоретических и экспериментальных методов в этой области.

### **Выводы по разделу**

Получена новая спиновая система, калибровочно эквивалентная уравнению Яджимы-Ойкавы и ее представление Лакса. Полученная система позволяет исследовать динамику и свойства магнитных спинов в ферромагнетиках, такие как прецессия спина, магнитные волны и другие явления. Может быть использована в теории магнетизма и для объяснения экспериментальных наблюдений и численных моделирований магнитных материалов. Рассмотрен нелокальный случай полученной системы, а также приведены различные вариации данной системы: найден бездисперсионный предел, получено солитонное решение и построена билинейная форма.

Результаты данного раздела опубликованы в работах [24, 61-63].

## 4 НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ МАГНЕТИКОВ И ИХ ГЕОМЕТРИЯ

В этом разделе представим интегрируемые поверхности, связанные с ОУЛЛ с СВП. Были получены первая и вторая фундаментальные формы. Первая фундаментальная форма позволяет вычислить кривизну и метрические свойства поверхности, в частности длину и площадь связанного с ней пространства. Вторая фундаментальная форма определяет внешнюю геометрию поверхности в окрестности этой точки. Вместе они позволяют определить внешние инварианты поверхности и ее главные кривизны. Результаты могут быть использованы для описания спиновых волн в магнетиках и ферромагнетиках [80-82].

Растущий интерес к физике магнитных явлений связан с различием взаимодействия между локальными магнитными моментами ионов. Они могут быть разнообразны по своей природе и иметь широкий спектр энергетических масштабов; также из-за особенностей кристаллической структуры они сильно различаются между соседними в разных направлениях магнитными ионами. Свойство анизотропии может приводить к образованию ферро- или антиферромагнитных состояний, а также необычных магнитных структур – спиновых волн или магнонов.

### 4.1 Интегрируемые поверхности, индуцированные обобщенным уравнением Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом

Рассмотрим ОУЛЛ с СВП, уравнение, описывающее волны намагниченности в магнетиках, или просто спиновые волны [69]. Представим интегрируемые поверхности, связанные с ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом. Приведем первую и вторую фундаментальные формы. Первая фундаментальная форма используется для вычисления кривизны и метрических свойств поверхности, в частности, длины и площади связанного пространства. Вторая фундаментальная форма определяет внешнюю геометрию поверхности в окрестности этой точки. Вместе они позволяют определить внешние инварианты поверхности и ее главные кривизны [25]. Результаты могут быть использованы для описания спиновых волн в магнетиках и ферромагнетиках.

#### 4.1.1 Фундаментальные формы для спиновых моделей

В общем виде первая и вторая фундаментальные формы (ФФ) имеют следующий вид [78]

$$I = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (191)$$

$$II = b_{ij} dx^i dx^j, \quad (192)$$

здесь  $g_{ij}, b_{ij}$  матрицы

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad (193)$$

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \quad (194)$$

ФФ могут быть представлены через перемещения и вектор нормали как

$$I = dr \cdot dr = r_x^2 dx^2 + 2r_x r_t dx dt + r_t^2 dt^2, \quad (195)$$

или

$$I = E dx^2 + 2F dx dt + G dt^2 \quad (196)$$

и

$$II = -dn \cdot dr = (n \cdot r_{xx}) dx^2 + 2(n \cdot r_{xt}) dx dt + (n \cdot r_{tt}) dt^2 \quad (197)$$

или

$$II = L dx^2 + 2M dx dt + N dt^2. \quad (198)$$

Вектор перемещения

$$r = (r_1, r_2, r_3) \quad (199)$$

и нормаль к поверхности

$$n = (n_1, n_2, n_3), \quad n^2 = 1. \quad (200)$$

Используя формулы Сим-Тафеля [64, р. 154-230]

$$r = \Phi^{-1} \Phi_\lambda, \quad (201)$$

перепишем векторы в матричной форме

$$r_x = \Phi^{-1} U_\lambda \Phi, \quad r_t = \Phi^{-1} V_\lambda \Phi. \quad (202)$$

Соотношения между производными вектора  $r$  по  $x$  и  $t$  и соответствующими векторными формами:

$$r_x^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(r_x^2),$$

$$r_t^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(r_t^2),$$

$$r_x r_t = \frac{1}{2} \text{tr}(r_x r_t).$$

Далее получим необходимые величины

$$r_x^2 = \Phi^{-1} U_\lambda^2 \Phi,$$

$$r_t^2 = \Phi^{-1} V_\lambda^2 \Phi,$$

$$r_x r_t = \Phi^{-1} U_\lambda V_\lambda \Phi.$$

Первую фундаментальную форму для ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом можно получить, собрав и подставив необходимые коэффициенты [78]:

$$\begin{aligned} I = & dx^2 + \left( 8\lambda - \frac{1}{(\lambda+a)^2} \text{Tr}\{S, W\} \right) dxdt + \left( 16\lambda^2 - \frac{1}{2} \text{Tr}((SS_x)^2) \right) dt^2 \\ & + \left( \frac{2\lambda}{(\lambda+a)^2} \text{Tr}\{S, W\} + \frac{i\lambda}{2(\lambda+a)^2} \text{Tr}\{SS_x, W\} + \frac{1}{2(\lambda+a)^2} \text{Tr}(W^2) \right) dt^2, \end{aligned} \quad (203)$$

где  $\{S, W\} = SW + WS$  - антикоммутирует.

При  $\lambda = \lambda_0 = 0$  перепишем первую фундаментальную форму как

$$\begin{aligned} I = & dx^2 - \frac{1}{a^2} \text{Tr}(SW) dxdt + \\ & + \frac{1}{2} \left( \text{Tr}((SS_x)^2) - \frac{i}{a^2} \text{Tr}\{SS_x, W\} - \frac{4}{a^2} \text{Tr}(W^2) \right) dt^2, \end{aligned} \quad (204)$$

Для получения второй фундаментальной формы найдем следующее

$$r_{xx} = \Phi^{-1} [U_\lambda, U] \Phi, \quad (205)$$

$$r_{xt} = \Phi^{-1} [U_\lambda, V] \Phi, \quad (206)$$

$$r_{tt} = \Phi^{-1} [V_\lambda, V] \Phi. \quad (207)$$

Вектор нормали к поверхности вычислим как

$$n = \frac{r_x \wedge r_t}{|r_x \wedge r_t|}, \quad (208)$$

или

$$n = \frac{\Phi^{-1}[U_\lambda, V_\lambda]\Phi}{\sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}([U_\lambda, V_\lambda]^2)}}. \quad (209)$$

След матрицы получим как

$$\begin{aligned} \text{tr}(n \cdot r_{xx}) &= \frac{\text{tr}([U_\lambda, V_\lambda][U_\lambda, U])}{\sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}([U_\lambda, V_\lambda]^2)}}, \\ \text{tr}(n \cdot r_{xt}) &= \frac{\text{tr}([U_\lambda, V_\lambda][U_\lambda, V])}{\sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}([U_\lambda, V_\lambda]^2)}}, \\ \text{tr}(n \cdot r_u) &= \frac{\text{tr}([U_\lambda, V_\lambda][V_\lambda, V])}{\sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}([U_\lambda, V_\lambda]^2)}}. \end{aligned}$$

Здесь получены интересные результаты, так как след коммутатора  $\text{Tr}[U_\lambda, V_\lambda] = 0$ , то соответствующе вектор нормали к поверхности также равен нулю, Следовательно, построение второй фундаментальной формы для рассматриваемой модели при таком подходе невозможно. Это означает, что ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом связано только с тривиальной солитонной поверхностью, что доказывается существованием только первой фундаментальной формы. Для некоторых уравнений поверхности солитонов не совпадают с интегрируемыми поверхностями.

#### 4.1.2 Интегрируемые поверхности, индуцированные ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом

Далее представим интегрируемую поверхность, индуцированную ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом. Для этого следующим образом преобразуем  $r_x \equiv S$ . Тогда  $r_t$  переписется как

$$r_t = \frac{i}{2} r_x \wedge r_{xx} + \frac{1}{a^2} W. \quad (210)$$

В данном случае, первая квадратичная форма будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} I &= dx^2 + \frac{2}{a^2} SW dx dt + \\ &+ \left( \frac{1}{4} (S \wedge SS_x)^2 - \frac{1}{a^2} (S \wedge S_x) W + \frac{1}{a^4} W^2 \right) dt^2, \end{aligned} \quad (211)$$

Далее с помощью (208) определим вектор нормали к поверхности как

$$n = \frac{\frac{1}{2}r_{xx} - \frac{1}{a^3}W_x}{\left| \frac{1}{2}r_{xx} - \frac{1}{a^3}W_x \right|}, \quad (212)$$

или

$$n = \frac{S_x - \frac{1}{a^3}W_x}{\left| S_x - \frac{1}{a^3}W_x \right|}. \quad (213)$$

Теперь найдем коэффициенты для второй квадратичной формы

$$L = n \cdot r_{xx}, \quad (214)$$

$$M = n \cdot \left( \frac{1}{2}(r_x \wedge r_{xx})_x + \frac{1}{a^2}W_x \right), \quad (215)$$

$$N = n \cdot \left( \frac{1}{2}(r_x \wedge r_{xx})_t \right), \quad (216)$$

в терминах  $S$  запишем как

$$L = \frac{(S_x - \frac{1}{a^3}W_x) \cdot S_x}{\left| S_x - \frac{1}{a^3}W_x \right|}, \quad (217)$$

$$M = \frac{S_x - \frac{1}{a^3}W_x}{\left| S_x - \frac{1}{a^3}W_x \right|} \cdot \left( \frac{1}{a^2}W_x - \frac{1}{2}(S \wedge S_x)_x \right), \quad (218)$$

$$N = -\frac{1}{2} \frac{S_x - \frac{1}{a^3}W_x}{\left| S_x - \frac{1}{a^3}W_x \right|} \cdot (S \wedge S_x)_t. \quad (219)$$

Вторая квадратичная форма может быть записана как

$$\begin{aligned}
II &= \frac{(S_x - \frac{1}{a^3}W_x) \cdot S_x}{|S_x - \frac{1}{a^3}W_x|} dx^2 + \\
& 2 \frac{S_x - \frac{1}{a^3}W_x}{|S_x - \frac{1}{a^3}W_x|} \cdot \left( \frac{1}{a^2}W_x - \frac{1}{2}(S \wedge S_x)_x \right) dxdt + \\
& - \frac{1}{2} \frac{S_x - \frac{1}{a^3}W_x}{|S_x - \frac{1}{a^3}W_x|} \cdot (S \wedge S_x)_t dt^2.
\end{aligned} \tag{220}$$

#### 4.1.3 Площадь поверхности индуцированной ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом

Площадь поверхности можно найти с помощью формулы [64, p. 1-5; 43]

$$S = \int \sqrt{g} dxdt = \iint |r_x \wedge r_t| dxdt. \tag{221}$$

Тогда, искомая площадь поверхности  $S$  запишется

$$S = \int \left| \frac{i}{a^3}W - \frac{1}{2}r_x \right| dt, \tag{222}$$

или

$$S = \int \left| \frac{i}{a^3}W - \frac{1}{2}S \right| dt. \tag{223}$$

Гауссову кривизну поверхности можно определить согласно

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{224}$$

Для рассматриваемого случая запишется как

$$K = - \frac{\left[ \frac{1}{2}(S_x - \frac{1}{a^3}W_x) \cdot S_x \right] \left[ S_x - \frac{1}{a^3}W_x \cdot (S \wedge S_x)_t \right] + \left[ S_x - \frac{1}{a^3}W_x \cdot \left( \frac{1}{a^2}W_x - \frac{1}{2}(S \wedge S_x)_x \right) \right]^2}{\left[ |S_x - \frac{1}{a^3}W_x|^2 \right] \left[ \frac{1}{4}(S \wedge SS_x)^2 - \frac{1}{a^2}(S \wedge S_x)W + \frac{1}{a^4}W^2 - \left( \frac{1}{a^2}SW \right)^2 \right]}, \tag{225}$$

в итоге найдена Гауссова кривизна в терминах  $S$  для рассматриваемой спиновой системы [25].

С помощью формулы Сим-Тафеля получена первая квадратичная формула

ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом. Доказано, что для рассматриваемого уравнения солитонная поверхность солитона не равна индуцированной им интегрируемой поверхности. Затем для построения интегрируемой поверхности, индуцированной ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом, были найдены первая и вторая фундаментальные формы, площадь поверхности и гауссова кривизна. Результаты могут быть использованы для более детального построения различных интегрируемых поверхностей, связанных с солитонными уравнениями.

#### 4.2 Интегрируемые кривые индуцируемые уравнением Яджимы-Ойкавы

Хорошо известно, что в измерениях (1+1) и (2+1) существует геометрическая эквивалентность между спиновыми системами и нелинейными уравнениями типа Шредингера [75-78], так называемая Лакшманан эквивалентность или сокращенно L-эквивалентность. В этом пункте найдем L-эквивалентный аналог уравнения (225)–(226). С этой целью в этом разделе изучим интегрируемое движение пространственных кривых, индуцированное уравнением. Для этого рассмотрим движущуюся пространственную кривую, параметризованную длиной дуги  $x$ . Хорошо известно, что такая пространственная кривая определяется следующими пространственными и временными уравнениями Серре-Френе (УСФ):

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}_x = C \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}_t = D \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad (226)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & \sigma \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\sigma & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (227)$$

Здесь  $\kappa$  и  $\sigma$  геодезическая кривизная и кривизна нормали пространственной кривой,  $\tau$  кручение, а также  $\omega_j (j=1,2,3)$  некоторые действительные функции. Перепишем УСФ как

$$e_{ix} = C \wedge e_i, \quad e_{it} = D \wedge e_i, \quad (228)$$

где

$$C = \tau e_1 + \sigma e_2 + \kappa e_3, \quad D = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (229)$$

и  $e_i$ 's,  $i=1,2,3$ . Условие совместности линейных уравнений (228) имеет вид

$$C_t - D_x + [C, D] = 0 \quad (230)$$

или

$$\begin{aligned}
\kappa_t &= \omega_{3x} - \tau\omega_2 + \sigma\omega_1, \\
\sigma_t &= \omega_{2x} - \kappa\omega_1 + \tau\omega_3, \\
\tau_t &= \omega_{1x} - \sigma\omega_3 + \kappa\omega_2.
\end{aligned}
\tag{231}$$

Предположим что функции  $\tau, \sigma, \kappa$  можно записать как

$$\tau = -id(r+q), \quad \sigma = d(r-q), \quad \kappa = 2d\lambda, \tag{232}$$

$$\omega_1 = \frac{d}{1-2d\lambda}(r_t - q_t), \quad \omega_2 = \frac{di}{1-2d\lambda}(r_t + q_t), \quad \omega_3 = -v, \tag{233}$$

где  $r, q$  – комплексные функции,  $v$  – действительная функция и  $d = const$ . Подставив (232)-(233) в (231) получим уравнения для  $q, r, v$ :

$$\begin{aligned}
iq_t - q_{xt} - vq &= 0, \\
ir_t + r_{xt} + vr &= 0, \\
v_x + 2d^2(rq)_t &= 0.
\end{aligned}
\tag{234}$$

Что и есть уравнение (138). Таким образом, построили интегрируемое движение пространственных кривых, индуцированное уравнением (139)-(140). В этом случае нетрудно проверить, что единичный вектор  $e_3$  удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}
e_{3t} - e_3 \wedge e_{3xt} - ue_{3x} &= 0, \\
u_x + \frac{1}{2}(e_{3x}^2)_t &= 0.
\end{aligned}
\tag{235}$$

Этот набор уравнений является геометрически или Лакшманан эквивалентным по аналогу данного уравнения при  $e_3 \equiv S$ .

### 4.3 Бездисперсионные пределы уравнений

В данной подглаве представлен бездисперсионный предел ОУЛЛ с СВП. Результаты могут быть использованы для описания спиновых волн в магнетиках и ферромагнетиках при отсутствии дисперсионных свойств среды [84].

Волны, как правило, имеют дисперсию, и первоначальная форма волны становится рассеянной, когда волны распространяются на большое расстояние. Однако в некоторых волнах дисперсия может быть компенсирована нелинейностью, и они могут распространяться на большие расстояния, сохраняя первоначальную форму волны. Структурно устойчивые уединенные волны, распространяющиеся в нелинейной среде, называются солитонами. Благодаря своим особым свойствам солитоны ведут себя как частицы: взаимодействуя друг с другом или с какими-либо другими возмущениями, они не коллапсируют, а продолжают двигаться, сохраняя свою структуру неизменной. Это свойство

можно использовать для передачи данных на большие расстояния без помех, что открывает огромные возможности для использования солитонов. Условием появления солитонов является уравнивание эффектов нелинейности и дисперсии. Нелинейность среды позволяет опрокидывать фронт волны, делая его более крутым, а дисперсия, наоборот, пытается разогнать волну, поэтому при их равновесии возникает солитон. Солитонные и солитоноподобные волны проявляются во многих областях физики и математики и описываются нелинейными уравнениями в частных производных с двумя и более независимыми переменными. Здесь рассмотрено ОУЛЛ с СВП с самосогласованным потенциалом и найден его бездисперсионный предел.

ОУЛЛ с СВП калибровочно эквивалентно уравнению Шрёдингера-Максвелла-Блоха что доказано в работах [85].

В теории интегрируемых систем, пара Лакса – это пара зависящих от времени матриц или операторов, которые удовлетворяют соответствующему дифференциальному уравнению, называемому уравнением Лакса. Пары Лакса были введены Питером Лаксом для обсуждения солитонов в сплошных средах [28]. Связь данных систем линейных уравнений с нелинейными выражается через условие нулевой кривизны. [86-87]. Решения же таких линейных систем используются для нахождения решений методом обратной задачи рассеяния.

#### 4.3.1 Бездисперсионный предел ОУЛЛ с потенциалом

Преобразуем уравнения (11)-(12) согласно граничным условиям, наложенным на матричные функции  $S$  и  $W$ ,  $S_3 = \sqrt{1-|S^+|^2}$ , аналогично,  $W_3 = \sqrt{1-|W^+|^2}$ .

Для нахождения бездисперсионного предела рассматриваемой системы воспользуемся следующей заменой переменных  $t \rightarrow \varepsilon t$ ,  $x \rightarrow \varepsilon x$ , где  $\varepsilon$  константа [68]. В таком случае соответствующие производные изменятся как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \tag{236}$$

Далее, с учетом замены переменных, перепишем систему уравнений для компонентов матриц  $S$  и  $W$ , как

$$i\varepsilon S_t^+ + \varepsilon^2 (S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+) + \frac{2}{a} (S^+ W_3 - S_3 W^+) = 0, \tag{237}$$

$$i\varepsilon W_x^+ - 2a(S_3 W^+ - S^+ W_3) = 0. \tag{238}$$

Введем масштабное преобразование компонентов функций  $S^+ = \sqrt{u_1} e^{\frac{is}{\varepsilon}}$  и  $W^+ = \sqrt{u_2} e^{\frac{is}{\varepsilon}}$ . Перепишем уравнения (237) и (238) в виде

$$i\varepsilon \frac{u_{1t}}{2\sqrt{u_1}} - 2\sqrt{u_1}s_t + \sqrt{u_1(1-u_1)}s_x^2 - i\varepsilon u_{1x}s_x \sqrt{\frac{1-u_1}{u_1}} - \quad (239)$$

$$-i\varepsilon \sqrt{u_1(1-u_1)}s_{xx} + \frac{2}{a} \left( \sqrt{u_1(1-u_2)} - \sqrt{u_2(1-u_1)} \right) = 0,$$

$$i\varepsilon u_{2x} - 2u_2s_x - a \left( \sqrt{1-u_1} - \sqrt{\frac{u_1}{u_2}(1-u_2)} \right) = 0. \quad (240)$$

Собирая коэффициенты различных степеней  $\varepsilon$  получим систему уравнений

$$u_{1t} - 2\sqrt{1-u_1}(u_1v)_x = 0, \quad (241)$$

$$v_t + (\sqrt{1-u_1}v^2)_x + \frac{2}{a} \left( \sqrt{u_1(1-u_2)} - \sqrt{u_2(1-u_1)} \right)_x = 0, \quad (242)$$

$$u_2v + 2a \left( \sqrt{1-u_1} - \sqrt{\frac{u_1}{u_2}(1-u_2)} \right) = 0, \quad (243)$$

здесь  $v = s_x$ . Таким образом получившаяся система уравнений (241)-(243) и является бездисперсионным пределом УФГ с потенциалом.

#### 4.3.2 Представление Лакса для бездисперсионного предела ОУЛЛ с потенциалом

Для нахождения пары Лакса бездисперсионного предела ОУЛЛ с СВП воспользуемся возможностью записать функцию  $\Phi$  в виде  $\Phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ . Далее используя преобразования, аналогичные вышеупомянутым, в частности,  $\phi_1 = e^{\frac{i\chi}{\varepsilon}}$  и  $\phi_2 = \xi e^{\frac{i(\chi+s)}{\varepsilon}}$ , перепишем

$$\varepsilon \phi_{1x} = -i\lambda(S_3\phi_1 + S^- \phi_2), \quad (244)$$

$$\varepsilon \phi_{2x} = -i\lambda(S^+ \phi_1 - S_3\phi_2). \quad (245)$$

Далее подставим  $\phi_1$  и  $\phi_2$  в систему уравнений (244)-(245). Из уравнения (244) получим

$$\chi_x = -\lambda(\sqrt{1-u_1} - \xi\sqrt{u_1}). \quad (246)$$

Из уравнения (245) определим

$$\xi = \frac{-\lambda\sqrt{u_1}}{\chi_x + s_x - \lambda\sqrt{1-u_1}}. \quad (247)$$

Далее перепишем (247) и получим первое представление Лакса

$$\chi_x + \lambda\sqrt{1-u_1} - \frac{\lambda^2\sqrt{|u_1|^2}}{\chi_x + s_x - \lambda\sqrt{1-u_1}} = 0, \quad (248)$$

или аналогично в терминах  $p$

$$p + \lambda\sqrt{1-u_1} - \frac{\lambda^2\sqrt{|u_1|^2}}{p + v - \lambda\sqrt{1-u_1}} = 0, \quad (249)$$

где  $p = \chi_x$  и  $v = s_x$ .

Следующим шагом рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon\phi_{1t} &= -2i\lambda^2(S_3\phi_1 + S^- \phi_2) + \lambda(S_3S_{3x} + S^- S_x^+)\phi_1 + \lambda(S_3S_x^- - S^- S_{3x})\phi_2 + \left(\frac{i}{\lambda+a} - \frac{i}{a}\right)(W_3\phi_1 + W^- \phi_2), \\ \varepsilon\phi_{2t} &= -2i\lambda^2(S^+ \phi_1 - S_3\phi_2) + \lambda(S^+ S_{3x} - S_3S_x^+)\phi_1 + \lambda(S^+ S_x^- + S_3S_{3x})\phi_2 + \left(\frac{i}{\lambda+a} - \frac{i}{a}\right)(W^+ \phi_1 - W_3\phi_2). \end{aligned}$$

Наконец, мы готовы написать второе представление Лакса

$$\begin{aligned} \chi_t &= -2\lambda^2(\sqrt{1-u_1} + \xi\sqrt{u_1}) + \left(\frac{1}{\lambda+a} - \frac{1}{a}\right)(\sqrt{1-u_2} + \xi\sqrt{u_2}) - \\ &- i\lambda\left[\frac{u_{1x}}{2} - \sqrt{u_1}\left(\frac{u_{1x}}{2\sqrt{u_1}} + \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{u_1}s_x\right)\right] + i\lambda\xi\left[\frac{u_{1x}\sqrt{u_1}}{2\sqrt{1-u_1}} + \sqrt{1-u_1}\left(\frac{\bar{u}_{1x}}{2\sqrt{u_1}} - \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{u_1}s_x\right)\right], \end{aligned} \quad (250)$$

$$\begin{aligned} \xi(\chi_t + s_t) &= -2i\lambda^2(\sqrt{u_1} + \xi\sqrt{1-u_1}) + \left(\frac{1}{\lambda+a} - \frac{1}{a}\right)(\sqrt{u_2} - \xi\sqrt{1-u_2}) - \\ &- \lambda\left[\frac{\sqrt{u_1}u_{1x}}{2\sqrt{1-u_1}} + \sqrt{1-u_1}\left(\frac{u_{1x}}{2\sqrt{u_1}} + \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{u_1}s_x\right)\right] + \lambda\xi\left[\sqrt{u_1}\left(\frac{\bar{u}_{1x}}{2\sqrt{u_1}} - \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{u_1}s_x\right) - \frac{u_{1x}}{2}\right], \end{aligned} \quad (251)$$

или в терминах  $f$

$$\begin{aligned} f &+ 2\lambda^2(\sqrt{1-u_1} + \xi\sqrt{u_1}) + \left(\frac{1}{\lambda+a} - \frac{1}{a}\right)(\sqrt{1-u_2} + \xi\sqrt{u_2}) + \\ &+ i\lambda\left[\frac{u_{1x}}{2} - \sqrt{u_1}\left(\frac{u_{1x}}{2\sqrt{u_1}} + \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{u_1}v\right)\right] - i\lambda\xi\left[\frac{u_{1x}\sqrt{u_1}}{2\sqrt{1-u_1}} + \sqrt{1-u_1}\left(\frac{\bar{u}_{1x}}{2\sqrt{u_1}} - \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{u_1}v\right)\right] = 0, \end{aligned} \quad (252)$$

где  $f = \chi_i$ .

Тем самым найдено представление Лакса для бездисперсионного предела ОУЛЛ с СВП в виде

$$p + \lambda\sqrt{1-u_1} - \frac{\lambda^2\sqrt{|u_1|^2}}{p+v-\lambda\sqrt{1-u_1}} = 0, \quad (253)$$

$$f + 2\lambda^2(\sqrt{1-u_1} + \xi\sqrt{u_1}) + \left(\frac{1}{\lambda+a} - \frac{1}{a}\right)(\sqrt{1-u_2} + \xi\sqrt{u_2}) + i\lambda\left[\frac{u_{1x}}{2} - \sqrt{u_1}\left(\frac{u_{1x}}{2\sqrt{u_1}} + \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{u_1}v\right)\right] - i\lambda\xi\left[\frac{u_{1x}\sqrt{u_1}}{2\sqrt{1-u_1}} + \sqrt{1-u_1}\left(\frac{\bar{u}_{1x}}{2\sqrt{u_1}} - \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{u_1}v\right)\right] = 0. \quad (254)$$

На основе полученных результатов, можно построить различные виды решений рассматриваемой модели [88-95].

С помощью масштабного преобразования получен бездисперсионный предел ОУЛЛ с СВП. Полученная модель может быть использована для описания спиновых волн в магнетиках и ферромагнетиках при отсутствии дисперсионных свойств среды. Что касается интегрируемости этой модели, то это необходимое и достаточное условие наличия представления Лакса. По результатам данной работы исследования в этом направлении выходят на новый этап, что позволит более детально изучить влияние дисперсионных эффектов на поведение спиновой волны и ее взаимодействие с векторным потенциалом [98-104].

#### 4.4 Двухслойные спиновые модели

##### 4.4.1 (1+1)-мерное двухкомпонентное уравнение

##### Шредингера-Максвелла-Блоха

Хорошо известное (1+1)-мерное двухкомпонентное уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха, описывающее динамику квантовой системы двух состояний, взаимодействующей с электромагнитным режимом оптического резонатора, является интегрируемым и допускает представление Лакса и другие необходимые свойства для полной интегрируемости. Представление Лакса для данной системы уравнений запишется как

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U\Psi, \\ \Psi_t &= (2\varepsilon_1\lambda U + V)\Psi, \end{aligned} \quad (255)$$

где

$$U = -i\lambda\Sigma + U_0 = \begin{pmatrix} -i\lambda & q_1 & q_2 \\ -r_1 & i\lambda & 0 \\ -r_2 & 0 & i\lambda \end{pmatrix}, \quad (256)$$

$$V = V_0 + \frac{i}{\lambda + \omega} V_{-1},$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} i(q_1 r_1 + q_2 r_2) & iq_{1x} & iq_{2x} \\ ir_{1x} & -iq_1 r_1 & -ir_1 q_2 \\ ir_{2x} & -iq_1 r_2 & -iq_2 r_2 \end{pmatrix}, \quad V_{-1} = \begin{pmatrix} \eta_1 & -p_1 & -p_2 \\ -k_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ -k_2 & \eta_4 & \eta_5 \end{pmatrix}. \quad (257)$$

Здесь  $\Psi = (\Psi_1(x, t), \Psi_2(x, t), \Psi_3(x, t))^T$  ( $T$  транспонированная матрица),  $\lambda$  спектральный параметр и  $\Sigma = \text{diag}(1, -1, -1)$ . Связность матричных операторов  $U$  и  $V$  имеет условие нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] - 2\varepsilon_1 \lambda U_x = 0. \quad (258)$$

Здесь коммутатор  $[U, V] = UV - VU$ . Рассмотрим следующие редукции  $r_1 = \delta q_1^*$ ,  $r_2 = \delta q_2^*$ ,  $k_1 = \delta p_1^*$ ,  $k_2 = \delta p_2^*$ , где  $*$  означает комплексное сопряжение,  $\delta = \pm 1$  и  $\varepsilon_1 = 1$ . Условие нулевой кривизны (258) дает уравнение ШМБ вида

$$\begin{aligned} iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1 - 2ip_1 &= 0, \\ iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2 - 2ip_2 &= 0, \\ p_{1x} - 2i\omega p_1 + (\eta_2 - \eta_1)q_1 + \eta_4 q_2 &= 0, \\ p_{2x} - 2i\omega p_2 + (\eta_5 - \eta_1)q_2 + \eta_3 q_1 &= 0, \\ \eta_{1x} + p_1^* q_1 + p_2^* q_2 + p_1 q_1^* + q_2^* p_2 &= 0, \\ \eta_{2x} - (q_1^* p_1 + p_1^* q_1) &= 0, \\ \eta_{3x} - (q_1^* p_2 + p_1^* q_2) &= 0, \\ \eta_{4x} - (q_2^* p_1 + p_2^* q_1) &= 0, \\ \eta_{5x} - (q_2^* p_2 + p_2^* q_2) &= 0, \end{aligned}$$

где  $q_j$ ,  $p_j$  комплексные и  $\eta_j$  действительные функции,  $\omega$  -- действительная постоянная.

#### 4.4.2 Калибровочная эквивалентность 2-х компонентного уравнения ШМБ, $\Gamma$ -спин системы и двухслойного ОУЛЛ

Понятие калибровочной эквивалентности было введено в работе [42] и получило дальнейшее развитие в последующих работах [44]. Две системы нелинейных уравнений называются калибровочно-эквивалентными, если они

обе интегрируемы с использованием метода обратной задачи рассеяния и если их связности  $U, U', V, V'$ , определенные на одном расслоении  $\varphi(x, t) \in GL(n, \mathbb{N})$ , могут быть получены друг из друга с помощью калибровочного преобразования, не зависящего от времени. Математически, это означает, что для двух систем линейных дифференциальных уравнений, соответствующих этим нелинейным системам, выполняется соотношение  $U = \varphi U' \varphi^{-1} + \varphi_x \varphi^{-1}, V = \varphi V' \varphi^{-1} + \varphi_t \varphi^{-1}$ . Для получения новой интегрируемой модели можно использовать следующее калибровочное преобразование  $\Psi = \varphi \Phi$ .

$$\Phi = \varphi^{-1} \Psi, \quad \varphi = \Psi|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (259)$$

Тогда  $\Phi$  является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$\Phi_x = U' \Phi, \quad (260)$$

$$\Phi_t = V' \Phi, \quad (261)$$

где

$$U' = -i\xi\Gamma, \quad V' = -2i(\xi^2 + 2\lambda_0\xi)\Gamma + \frac{1}{2}\xi[\Gamma, \Gamma_x] + \frac{i}{\xi + \lambda_0 + \omega}W - \frac{i}{\lambda_0 + \omega}W. \quad (262)$$

Здесь

$$\Gamma = \varphi^{-1}\Sigma\varphi, \quad \Gamma^2 = I, \quad W = \varphi^{-1}V_{-1}\varphi, \quad \xi = \lambda - \lambda_0. \quad (263)$$

Применив перекрестное дифференцирование  $\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$  к системе уравнений (260)-(261), получим условие нулевой кривизны для искомой системы

$$U'_t - V'_x + [U', V'] = 0. \quad (264)$$

Подставив значения (262) в (264) получим систему уравнений

$$i\Gamma_t + \frac{1}{2}[\Gamma, \Gamma_{xx}] - 4i\lambda_0\Gamma_x - \frac{1}{\lambda_0 + \omega}[W, \Gamma] = 0, \quad (265)$$

$$iW_x - (\lambda_0 + \omega)[W, \Gamma] = 0, \quad (266)$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix}. \quad (267)$$

$\Gamma$ -спиновая система [74] с самосогласованным потенциалом (265)-(266) является калибровочным эквивалентом двухкомпонентного уравнения ШМБ.

Пусть  $\varphi$  запишется как [85]

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2^* & -\varphi_3^* \\ \varphi_2 & \varphi_1^* & 0 \\ \varphi_3 & 0 & \varphi_1^* \end{pmatrix}. \quad (268)$$

Тогда, компоненты матрицы  $\Gamma$  с учетом (267) будут

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2 - |\varphi_3|^2 & -2\varphi_1^* \varphi_2^* & -2\varphi_1^* \varphi_3^* \\ -2\varphi_1 \varphi_2 & |\varphi_2|^2 - |\varphi_1|^2 - |\varphi_3|^2 & 2\varphi_2 \varphi_3^* \\ -2\varphi_1 \varphi_3 & 2\varphi_2^* \varphi_3 & |\varphi_3|^2 - |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (269)$$

где  $\Delta = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2$ . Введем новые матричные функции  $A$  и  $B$

$$A = g^{-1} \sigma_3 g = \begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}, \quad B = h^{-1} \sigma_3 h = \begin{pmatrix} B_3 & B^- \\ B^+ & -B_3 \end{pmatrix}, \quad (270)$$

где

$$g = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2^* \\ \varphi_2 & \varphi_1^* \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_3^* \\ \varphi_3 & \varphi_1^* \end{pmatrix}. \quad (271)$$

Исходя из (270) компоненты матриц  $A$  и  $B$  перепишем как

$$A^+ = -\frac{2\varphi_1 \varphi_2}{\Delta_1}, \quad A^- = -\frac{2\varphi_1^* \varphi_2^*}{\Delta_1}, \quad A_3 = \frac{|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2}{\Delta_1}, \quad (272)$$

$$B^+ = -\frac{2\varphi_1 \varphi_3}{\Delta_2}, \quad B^- = -\frac{2\varphi_1^* \varphi_3^*}{\Delta_2}, \quad B_3 = \frac{|\varphi_1|^2 - |\varphi_3|^2}{\Delta_2}, \quad (273)$$

где  $\Delta_1 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2$  и  $\Delta_2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2$ . Через компоненты  $A$  и  $B$ , спиновая матрица  $\Gamma$  выражается следующим образом

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_3 \Delta_1 - |\varphi_3|^2 & A^- \Delta_1 & B^- \Delta_2 \\ A^+ \Delta_1 & -A_3 \Delta_1 - |\varphi_3|^2 & 2\varphi_2 \varphi_3^* \\ B^+ \Delta_2 & 2\varphi_2^* \varphi_3 & -B_3 \Delta_2 - |\varphi_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (274)$$

также можно записать как

$$\Gamma = \frac{1}{K+2} \begin{pmatrix} 2A_3 - K & 2A^- & \frac{2B^-(1+A_3)}{1+B_3} \\ 2A^+ & -2A_3 - K & \frac{2A^+B^-}{1+B_3} \\ \frac{2B^+(1+A_3)}{1+B_3} & \frac{2A^-B^+}{1+B_3} & K-2 \end{pmatrix}, \quad (275)$$

где

$$K = \frac{(1+A_3)(1-B_3)}{(1+B_3)}. \quad (276)$$

Спиновые матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяют следующей системе уравнений, называемой двухслойным обобщенным уравнением Ландау-Лифшица с потенциалом

$$iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + i(u_1 - 4\lambda_0)A_x + \left( v_1 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2(\lambda_0 + \omega)} \right) [\sigma_3, A] - \frac{2}{(\lambda_0 + \omega)} G = 0, \quad (277)$$

$$iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + i(u_2 - 4\lambda_0)B_x + \left( v_2 - \frac{\eta_1 + \eta_5}{2(\lambda_0 + \omega)} \right) [\sigma_3, B] - \frac{2}{(\lambda_0 + \omega)} H = 0, \quad (278)$$

где

$$u_1 = \frac{2ia}{\Delta_1}, \quad u_2 = \frac{2ib}{\Delta_2}, \quad v_1 = -\frac{|q_2|^2 \Delta}{\Delta_1}, \quad v_2 = -\frac{|q_1|^2 \Delta}{\Delta_2}. \quad (279)$$

Здесь  $a = q_2^* \varphi_1 \varphi_3^* - q_2 \varphi_1^* \varphi_3$ ,  $b = q_1^* \varphi_1 \varphi_2^* - q_1 \varphi_1^* \varphi_2$ ,  $G$  и  $H$  являются матричными функциями.

Система уравнений (277)-(279) описывает нелинейные процессы намагничивания в двухслойных магнетиках.

Для рассматриваемого уравнения существует солитонное решение, которое было найдено в работе [89].

### Выводы по разделу

В данном разделе была установлена калибровочная эквивалентность

между двухкомпонентным уравнением ШМБ, спиновой системой и двухслойным обобщенным уравнением Ландау-Лифшица с потенциалом. Найден бесдисперсионный предел и построены первая и вторая квадратичные формы для уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом.

Результаты данного раздела опубликованы в работах [25, 68, 78, 85-97].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации содержатся новые, научно обоснованные теоретические результаты, являющиеся итогом достижения основной цели и решения поставленных задач. Совокупность полученных результатов имеет важное значение для развития представлений о терории интегрируемых систем с самосогласованными потенциалами, в том числе с нелокальностью.

Изучение локальных и нелокальных интегрируемых спиновых систем с самосогласованными потенциалами является актуальной и перспективной областью исследований. Эта область объединяет физику, математику и технологии, и имеет широкий спектр приложений от разработки новых материалов и устройств до фундаментального понимания магнетизма.

Исследования в этой области способствуют развитию фундаментальных концепций и математических методов, необходимых для анализа и понимания сложных спиновых систем. Они также способствуют разработке новых технологий, включая спинтронику, магнитоэлектронику и информационные технологии.

Одной из важных задач в этой области является поиск новых интегрируемых моделей и изучение их свойств, включая солитонные решения и динамическое поведение спиновых систем. В целом, изучение локальных и нелокальных интегрируемых спиновых систем с самосогласованными потенциалами представляет значимый научный и технологический интерес и имеет потенциал для дальнейших открытий и применений.

По данным диссертационной работы можно сделать следующие **выводы**:

Полученная новая спиновая модель, описывает движение вектора намагниченности в ферромагнетиках. Исследование характера поведения вектора намагниченности и спиновых волн позволяет поставить гипотезу о возможности появления солитонов и солитоноподобных формирований в данной среде. В частности, получены следующие результаты:

- Новая спиновая система, калибровочно эквивалентная уравнению семейства нелинейных уравнений типа Шредингера, а именно уравнению Яджимы-Ойкавы.
- Представление Лакса, доказывающее интегрируемость полученной спиновой модели в рамках теории солитонов.
- Точные солитонные и солитоноподобные типы решений нелокальной обобщенной спиновой модели и модели с потенциалом.
- Обобщение методов нахождения солитонных и солитоноподобных решений нелокальных спиновых моделей. Нелокальные версии рассматриваемых моделей, приведенных в работе, могут обеспечить дальнейшие расширения с комплексными компонентами. В работе показано как естественным образом нелокальность может быть включена в пару вспомогательных уравнений, возникающих в этой ситуации. Также как нелокальность реализуется в стандартных типах процедур решения нелинейных уравнений.

Данные результаты способствуют развитию методов теории солитонов, исследований интегрируемых спиновых систем, а также расширению подходов, связанных с наличием  $P$ - и  $PT$ -симметрий рассматриваемых моделей.

Дальнейшие перспективы развития исследований в области спиновых систем с самосогласованными потенциалами могут иметь прямое применение в различных технологических областях. Например, разработка новых материалов и структур на основе этих систем может привести к созданию более эффективных и мощных устройств в области спинтроники, магнитоэлектроники и информационных технологий. Кроме того, способствует развитию фундаментальных аспектов математической физики и имеет потенциал для применения в других областях науки и технологий.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаю огромную благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору, академику НАН РК Ратбаю Мырзакулову, а также кандидату физико-математических наук, ассоциированному профессору Гулгасыл Нукербаевне Нугмановой за постановку задачи, руководство и всестороннюю поддержку в период выполнения данной работы. Выражаю благодарность своему зарубежному консультанту профессору Дугласу Синглетону за плодотворную совместную работу и консультации во время моей научно-исследовательской стажировки на кафедре физики Калифорнийского государственного университета (Фресно, США). Выражаю благодарность сотрудникам кафедры общей и теоретической физики Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева за полезные обсуждения, семинары и за создание благоприятной рабочей атмосферы при выполнении данной диссертационной работы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Калиникос Б.А. Спиновые волны в ферромагнетиках // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – Т. 5. – С. 93-100.
- 2 Барьяхтар В. Г., Криворучко В. Н., Яблонский Д. А. Функции Грина в теории магнетизма. — К.: Наукова думка, 1984. — 336 с.
- 3 Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Physical Review letters. – 1965. – Vol. 15. – P. 240-243.
- 4 Dauxois T., Peyrard M. Physics of Solitons. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 422 p.
- 5 MLA style: The Nobel Prize in Physics 2001  
<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2001/summary>
- 6 MLA style: The Nobel Prize in Chemistry 2000  
<https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/2000/summary>
- 7 Maimistov A.I., Manykin E.A. Propagation of ultrashort optical pulses in resonant nonlinear light guides // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1983. – Vol. 58, №4. – P. 685-687.
- 8 Nakkeeran K. Optical solitons in erbium doped fibers with higher order effects // Physics Letters A. – 2000. – Vol. 275. – P. 415-418.
- 9 Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S. Nonlinear magnetization waves: dynamical and topological solitons. – Kiev: Naukova Dumka, 1983. – 189 p.
- 10 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable Nonlocal Nonlinear Schrodinger Equation // Physical Review Letters. – 2013. – Vol. 110. – P. 064105-1-20.
- 11 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable Nonlocal Nonlinear Equations // Stud. Appl. Math. – 2016. – Vol. 139. – P. 7-59.
- 12 Юсипова Ю.А., Попов А.И. Спиновые вентили в микроэлектронике. Обзор // Изв. вузов. Электроника. 2021. Т. 26. № 1. С. 7–29.
- 13 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation // Nonlinearity. – 2016. – Vol. 29. – P. 915-946.
- 14 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable space-time shifted nonlocal nonlinear equations // Phys. Lett. A. – 2021. – Vol. 409. – P. 127516-1-10.
- 15 Lakshmanan M. The fascinating world of the Landau–Lifshitz–Gilbert equation: an overview // Philos Trans A Math Phys Eng Sci. – 2011. – Vol. 369, Issue 1939. – P. 280-300.
- 16 Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. – М., 1967. – 368 с.
- 17 Matveev V.B. Some comments on the rational solutions of the Zakharov-Schabat equations // Lett. in Math. Phys. – 1979. – Vol. 3. – P. 503-512.
- 18 Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G. Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials // Symmetry. – 2015. – Vol. 7, Issue 3. – P. 1352-1375.

- 19 Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G. Integrable Motion of Curves in Self-Consistent Potentials: Relation to Spin Systems and Soliton Equations // *Physics Letters A*. – 2014. – Vol. 378, Issue 30-31. – P. 2118-2123.
- 20 Muthuganesan R., Sankaranarayanan R. Nonlocal Correlation in Heisenberg Spin Models // *International Journal of Modern Physics B*. – 2017. – Vol. 31. №23. – P. 1750166-1-1750166-10.
- 21 Tjon J., Wright J. Solitons in the continuous Heisenberg spin chain // *Physical Review B, APS*. – 1977. – Vol. 15, Issue 7. – P. 3470-1-3470-10.
- 22 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // *Phys. Zs. Sowjet.*, 1935, 8, С. 153-169.
- 23 Nugmanova G., Sagidullayeva Zh., Myrzakulov R. Hirota's method for a spin model with self-consistent potential // *Journal of Physics: Conference Series* – 2017. – Vol. 804. – P. 012035-1-012035-15.
- 24 Albatyrova M.B., Sagidullayeva Zh.M. Rogue wave and soliton solution for the nonlinear integrable spin model // *Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*. – 2023. – Vol. 2., No 346. – P. 19-26.
- 25 Sagidullayeva, Z., Nugmanova, G., Myrzakulov, R. Integrable surfaces induced by generalized Landau-Lifshitz equation with self-consistent potential // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1416. – P. 1-6.
- 26 Yersultanova Z., Zhassybayeva M., Yesmakhanova K. Darboux transformation and exact solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. – 2016. – Vol. 13. – P. 1550134-1-1550134-12.
- 27 Song J.-Y., Hao H.-Q. Darboux transformation and explicit solutions for the (2+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrödinger–Maxwell–Bloch system // *Applied Mathematics Letters*. – 2019. – Vol. 96. – P. 166-171.
- 28 Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1968. – Vol. 21. – P. 467-490.
- 29 Wang H.R., Guo R. Soliton, breather and rouge wave solutions for the Myrzakulov--Lakshmanan--IV equation // *Optic--Int. J. Light Elect. Opt.* – 2021. – Vol. 242. – P. 166353-1-166353-16.
- 30 Deng B.J., Hao H.Q. Breathers, rogue waves and semi--rational solutions for a generalized Heisenber ferromagnet equation // *Appl. Math. Lett.* – 2023. – Vol. 140. – P. 108550-1-108550-12.
- 31 Zakharov V.E., Mikhailov A.V. Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 1978. – Vol. 47, Issue 6. – P. 1017-1027.
- 32 Нугманова Г.Н., Сагидуллаева Ж.М. Обобщенная спиновая модель с векторным потенциалом и ее решение // *Вестник Карагандинского университета, Серия Математика.-Караганда, 2017.-№2(86).- С. 91-96.*
- 33 Massalimova A., Sagidullayeva Zh. Polynomial solution for a spin model with self-consistent potential, *Материалы XIV международной научной конференции студентов и молодых ученых “Наука и образование – 2019”*. –

Астана, 2019.-С. 207-211.

34 Сагидуллаева Ж. Разрушительные волны для модели Гейзенберга с самосогласованным потенциалом, Ломоносов – 2015: материалы XI международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. –Астана, 2015.-Ч-1.-С.-108-109.

35 Мықтыбай Ж.М. Сагидуллаева Ж. Интегрируемость спиновой модели с самосогласованным потенциалом // Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент: материалы 9-й международной научной конференции посвященной 90-летию академика Е.А. Букетова. –Караганда, 2015.

36 Dynamic solution of the Generalized Landau-Lifshitz equation, The abstract book of the International Conference in Advancement in Mathematical Sciences (AMS-2015). -Antalya, Turkey, 2015. –P.41., Nugmanova G.N.

37 Талипова Д.Н., Сагидуллаева Ж. Доменные стенки одной спиновой модели, Материалы XI международной научной конференции студентов и молодых ученых “Наука и образование – 2016”. –Астана, 2016.-С.255-259.

38 Сагидуллаева Ж. Метод Хироты для одной спиновой модели с векторным потенциалом, Ломоносов – 2015: Тезисы докладов XII международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. –Астана, 2016.-Ч-1.-С.-119-120.

39 Baker G.A., Gammel J.L. The Pade Approximant in Theoretical Physics. – NY.: Academic Press, 1971. – 322 p.

40 Nugmanova G., Azimkhanova A. Integrable hierarchies of Heisenberg ferromagnet equation // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 738. – P. 012132-1-012132-12.

41 Жаңабергенова Н.С., Сагидуллаева Ж. Солитонное решение для интегрируемой иерархии уравнения ферромагнетика Гейзенберга, Материалы XI международной научной конференции студентов и молодых ученых “Наука и образование – 2017”. –Астана, 2017.-С.1608-1612.

42 Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга // Теоретическая и математическая физика. – 1979. – Т. 38, №1. – С. 26-35.

43 Тахтаджян Л., Фадеев Л. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 528 с.

44 Липовский В.Д., Широков А.В. Пример калибровочной эквивалентности многомерных интегрируемых уравнений // Функциональный анализ и его приложения. – 1989. – Т. 23, №3. – С. 65-66.

45 Wazwaz A. Integrability of two coupled Kadomtsev-Petviashvili equations, Pramana // Journal of physics. – 2011. – Vol. 77. – P. 233-241.

46 Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. Method for Solving the Korteweg-deVries Equation // Physical Review letters. – 1967. – Vol. 19. – P. 1095-1097.

47 Kalita J., Das R., Hosseini K. Solitons in Magnetized plasma with electron inertia under weakly relativistic effect // Nonlinear Dyn. – 2023. – Vol. 111. –

P. 3701-3711.

48 Madhukalya B., Das R., Hosseini K. Effect of ion and negative ion temperatures on KdV and mKdV solitons in a multicomponent plasma // *Nonlinear Dyn.* – 2023. – Vol. 111. – P. 8659-8671.

49 Mohanty S. K., Pradhan B., Sagidullayeva Zh., Myrzakulov R., Dev A.N. Exact solutions for the Bogoyavlensky-Konopelchenko equation with variable coefficients with an efficient technique // *Alexandria Engineering Journal.* – 2023. – Vol. 72. – P. 287-293.

50 Maimistov A.I., Manykin E.A. Propagation of ultrashort optical pulses in resonant nonlinear light guides // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* – 1983. – Vol. 58, Issue 4. – P. 685-687.

51 Nakkeeran K. Optical solitons in erbium doped fibers with higher order effects // *Physics Letters A.* – 2000. – Vol. 275. – P. 415-418.

52 Hemmen J.L., Brito A.A.S., Wreszinsli W.F. Spin Waves in Quantum Ferromagnet // *Journal of Statistical Physics.* – 1984. – Vol. 37, Issue 1-2. – P. 2-28.

53 Ma L.Y., Zhu Z.N. Nonlocal nonlinear Schrödinger equation and its discrete version: Soliton solutions and gauge equivalence // *J. Math. Phys.* – 2016. – Vol. 57. – P. 083507-1-083507-12.

54 Ma L.-Y., Shen S.-F., Zhu Z.-N. From discrete nonlocal nonlinear Schrödinger equation to coupled discrete Heisenberg ferromagnet equation // *Applied Mathematics Letters.* – 2022. – Vol. 130. – P. 108002-1-108002-18.

55 Ma W.-X. Integrable nonlocal nonlinear Schrodinger equations associated with  $so(3, R)$  // *Proceedings of the American mathematical society.* – 2022. – Vol. 9. – P. 1-11.

56 Cen J., Correa F., Fring A. et al. Stability in integrable nonlocal nonlinear equations // *Physics Letters A.* – 2022. – Vol. 435. – P. 128060-1-128060-22.

57 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G. A (2+1)-dimensional. - integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // *Physics Letters A.* – 1997. – Vol. 233. – P. 391-396.

58 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G. // *Phys. Lett. A.* – 1999. – Vol. 233, Issue 4. – P. 391-398.

59 Myrzakulov R., Nugmanova G., Danlybaeva A. Geometry and multidimensional soliton equations // *Theoretical and Mathematical Physics.* – 1999. – Vol. 188. – P. 441-452.

60 Schief W.K., Rogers C. Backlund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 413 p.

61 Sagidullayeva Zh., Nugmanova G., Myrzakulov R., Serikbayev N. Integrable Kuralay Equations: Geometry, Solutions and Generalizations // *Symmetry.* – 2022. – Vol. 14, No 7. – P. 1374.

62 Нурбаева З.А., Сагидуллаева Ж. Калибровочная эквивалентность нелокального уравнения Хироты и спиновой системы, Ломоносов – 2022: Тезисы докладов XVII международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. – Астана, 2022.-Ч-1.-С.-69-71.

- 63 Нұрбаева З.А., Сагидуллаева Ж. Решение типа бризер для (1+1)-мерного уравнения Хироты, Сборник материалов XVII Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Gylym jáne Bilim - 2022». – Астана, 2022.-С.220-224.
- 64 Sym A. Soliton Surfaces and their Applications // Lecture Notes in Phys. – 1985. – Vol. 239. – P. 154-231.
- 65 Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. – Vol. 14, Issue 7. – P. 1-20.
- 66 Yesmakhanova K., Nugmanova G., Shaikhova G. Coupled dispersionless and generalized Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent sources: Geometry and equivalence // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2020. – Vol. 17, Issue 7. – P. 2050104.
- 67 Myrzakul A., Nugmanova G., Serikbayev N. Surfaces and Curves Induced by Nonlinear Schrodinger-Type Equations and Their Spin Systems // Symmetry. – 2021. – Vol. 13. – P. 1827-1841.
- 68 Sagidullayeva Z., Nugmanova G., Myrzakulov R. Dispersionless limit of the Heisenberg ferromagnet equation with self-consistent potential // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2159. – P. 1-7.
- 69 Lakshmanan M. On the geometrical interpretation of solitons // Physics Letters. – 1978. – Vol. 64, Issue 4. – P. 354-356.
- 70 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Syzdykova R. et al. On the simplest (2+1)-dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear Schrodinger equations // Journal of Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 39. – P. 2122-2139.
- 71 Zhang Y., Nie X.-J., Zha Q.-L. Rogue Wave Solutions for the Heisenberg Ferromagnet Equations // Chinese Phys. Lett. – 2014. – Vol. 31 – P. 060201-1-060201-4.
- 72 Chen Ch., Zhou Zi-X. Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-I Equation // Chin. Phys. Lett. – 2009. – Vol. 26. – P. 080504-1-080504-12.
- 73 Бердалиева С., Сагидуллаева Ж., Мырзакулов Е. Периодическое решение для уравнения АКНС с самосогласованными источниками, «Шоқан оқулары - 23» материалы международной научно-практической конференции. – 2019, Т.4, С.8-13.
- 74 Myrzakul A., Nugmanova G., Serikbayev N. et al. Surfaces and Curves Induced by Nonlinear Schrodinger-Type Equations and Their Spin Systems // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, Issue 10. – P. 1827-1-1827-12.
- 75 Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method // Physics Letters A. – 1977. – Vol. 64. – P. 235-238.
- 76 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G.N. A (2+1) - dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Physics Letters A. – 1997. – Vol. 233. – P. 391-396.

77 Myrzakulov R., Nugmanova G., Danlybaeva A. Geometry and multidimensional soliton equations // Theoretical and Mathematical Physics. – 1999. – Vol. 118. – P. 347-358.

78 Nugmanova G., Sagidullayeva Zh., Myrzakulov R. Motion of three interacting curves, multi-layer spin systems and the vector NLS-Maxwell-Bloch equation, The abstract book of the 3rd International Conference on Symmetries, Differential Equations and Applications. –Istanbul, Turkey, 2017. –P.20.

79 Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence between (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 1998. – Vol. 31. – P. 9535-9545.

80 Zhang Zh-H., Deng M., Zhao W-Zh. et al. On the integrable inhomogeneous Myrzakulov I equation // <https://arxiv.org/abs/nlin/0603069v1>. 15.08.2021.

81 Chen Ch., Zhou Zi.-X. Darboux transformation and exact solutions of the Myrzakulov I equation // Chinese Physics Letters. – 2009. – Vol. 26, Issue 8. – P. 080504.

82 Hai C., Xiang Z.Z. Darboux transformation with a double spectral parameter for the Myrzakulov-I equation // Chin. Phys. Lett. – 2014. – Vol. 31. – P. 120504.

83 Альбатырова М.Б., Сагидуллаева Ж. Изоморфизм алгебр Ли  $su(2)$  и  $so(3)$  на примере уравнения Гейзенберга с потенциалом, Ломоносов – 2022: Тезисы докладов XVII международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. –Астана, 2022.-Ч-1.-С.-53-55.

84 Brunelli J. Dispersionless Limit of Integrable Models // Braz. J. Phys. – 2000. – Vol. 30. – P. 455-468.

85 Сагидуллаева Ж. О калибровочной эквивалентности двухслойного уравнения М-ХСІХ и двухкомпонентного уравнения Шредингера-Максвелла-Блоха, Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. Серия. Физика. Астрономия. – Астана. – 2018.-№3(124).- С. 41-46.

86 Ding Q. On the gauge equivalent structure of the discrete nonlinear Schrodinger equations // Phys. Lett. A. – 2000. – №266. – P. 146-154.

87 Kaplan M., Akbulut A., Raza N. Research on sensitivity analysis and traveling wave solutions of the (4+1)-dimensional nonlinear Fokas equation via three different techniques // Phys. Scripta. – 2022. – Vol. 97. – P. 015203.

88 Nugmanova G.N., Sagidullayeva Zh., Yersultanova Z. Integrability and solutions of Zakharov equation, The abstract book of the International Scientific Conference “Modern problems of applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2016”. –Bukhara, Uzbekistan, 2016. -P.132-133.

89 Sagidullayeva Zh. Two-layer spin system with self-consistent potential, Proceedings of the 3rd International conference "Astrophysics, Gravity and Cosmology". -Astana, 2016. P.222-225.

90 Sagidullayeva Zh., Nugmanova G., Myrzakulov R. Integrable two-layer

spin systems with self-consistent potential, Book of Abstracts of the conference Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena PMNP2017: 50 years of IST–Gallipoli, Italy, 2017. –P. 28,

91 Sagidullayeva Zh., Nugmanova G. Exact solutions of integrable spin system, Book of Abstracts of the conference Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena PMNP2017: 50 years of IST–Gallipoli, Italy, 2017. –P. 28.

92 Nugmanova G., Sagidullayeva Zh. Integrable spin systems and its exact solutions, Abstracts of VI Congress of the turkic world mathematical society, Astana, 2017. – P.98.

93 Сагидуллаева Ж. Односолитонное решение одной интегрируемой двухслойной спиновой системы, Материалы XIII международной научной конференции студентов и молодых ученых “Наука и образование – 2018”. – Астана, 2018.-С.466-469.

94 Сагидуллаева Ж. Бездисперсионный предел обобщенного уравнения Ландау-Лифшица, Материалы XIV международной научной конференции студентов и молодых ученых “Наука и образование – 2019”. –Астана, 2019.-С. 317-319.

95 Sagidullayeva Zh. Integrals of motion of the two-layer generalized Landau-Lifshitz equation with self-consistent potential, Proceedings of the IV International conference "Astrophysics, Gravity and Cosmology". -Astana, 2019. P.222-225.

96 Albatyrova M.B., Sagidullayeva Zh. Investigation of the Heisenberg chiral equation with Hirota's method, Сборник материалов VI-й международной научно- практической конференции «Роль физико- математических наук в современном образовательном пространстве» – Атырау, 2021. – Т.1, С.16-19.

97 Nurbayeva Z., Sagidullayeva Zh., Altaybayeva A.B., Darboux transformation for chiral equation, Сборник материалов VI-й международной научно- практической конференции «Роль физико- математических наук в современном образовательном пространстве» – Атырау, 2021. – Т.1, С.28-33.

98 Гаудсмит С. Открытие спина электрона // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 93, №1. – С. 151-158.

99 Липовский В.Д., Широков А.В. Пример калибровочной эквивалентности многомерных интегрируемых уравнений // Функциональный анализ и его приложения. – 1989. – Т. 23, №3. – С. 65-66.

100 Parkinson J.B., Farnell D.J.J. An Introduction to Quantum Spin System. – Berlin: Springer, 2010. – 154 p.

101 Вонсовский С.В. Магнетизм. – М., 1984. – 208 с.

102 Уайт Р. Квантовая теория магнетизма / пер. с англ. – М., 1985. – 304 с.

103 Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. – Киев, 1983. – 189 с.

104 Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. – М., 1987. – 269 с.